ა.ხანთაძე, თ.გზირიშვილი, ღ.არველაძე

საქართველოს მდგრადი განვითარების მათემატიკური მოდელის შესახებ

ნებისმიერი ქვეყნის მდგრადი განვითარების სოციალურ-ეკონომიკური პოლიტიკა უნდა ემყარებოდეს საზოგადოების განვითარების ობიექტურ კანონებს, ისევე, როგორც ზუსტი მეცნიერების დარგებში (ფიზიკა, მათემატიკა და ა.შ.), შეუძლებელია რაიმე მნიშვნელოვანი პრობლემის წარმატებით გადაწყვეტა ბუნების კანონების ღრმა ცოდნის გარეშე, ასევე საზოგადოების ობიექტური კანონების უგულველყოფა იწვევს ქვეყანაში კრიზისული სიტუაციის შექმნას, საიდანაც ხშირად ძალზე ძნელი ხდება თავის დაღწევა. ამჟამად, მსოფლიოში მრავალი ქვეყანა არსებობს, რომლებმაც ათეული წლებია მოიპოვეს დამოუკიდებლობა, მაგრამ თავიანთი სოციალურ-ეკონომიკური მდგომარეობით ჯერ კიდევ ვერ გასცდნენ სიღარიბისა და შიმშილის ზღვარს სწორედ იმის გამო, რომ თავის დროზე მათ არ შექმნეს (ან ვერ შექმნეს), საზოგადოების ობიექტური კანონებიდან გამომდინარე ქვეყნის განვითარების პერსპექტიული გეგმა და სამოქმედო პროგრამა.

როგორც განვითარებული ქვეყნების გამოცდილება გვიჩვენებს, მდგრადი განვითარების სამოქმედო პროგრამა უნდა ემყარებოდეს ქვეყანაში რეალურად მიმდინარე სოციალურ-ეკონომიური და პოლიტიკური პირობების ამსახველ ურთულეს პროცესებს, რომლებიც ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხორციელდება მრავალი რეგულირებადი და მარეგულირებელი პარამეტრების პირდაპირი და უკუკავშირებით. ამიტომ, ბუნებრივია, რომ ასეთი რთული სამოქმედო პროგრამის შექმნა და მისი პრაქტიკაში დანერგვა შეიძლება მოხდეს მხოლოდ მას შემდეგ, თუ ქვეყნის სხვადასხვა დარგის (ეკონომისტები, მათემატიკოსები, ფიზიკოსები, იურისტები, პოლიტოლოგები და ა.შ.) პროფესიონალების ერთ გუნდად შეკრული კოლექტივის ძალისხმევით შესაძლებელი იქნება პროგრამის ამსახველი მათემატიკური მოდელის შექმნა და მისი ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანაზე (EGM-ზე) რეალიზება, ვინაიდან მხოლოდ EGM იძლევა საშუალებას რეგულარებადი ფუნქციებისაგან (P-მოსახლეობის რაოდენობა, K-ძირითადი ფინანსური ფონდები, X-სოფლის მეურნეობა, როგორც ძირითადი ფონდების ნაწილი, R-რესურსები, Z-დაჭუჭყიანება და ა.შ.) შედგენილი ურთულესი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა მარეგულირებელი, პრაქტიკული მონაცემებიდან აღებული, პარამეტრების შერჩევით ამოიხსნას საპროგნოზო დროითი ინტერვალისათვის და გათამაშდეს ქვეყნის განვითარების სხვადასხვა სცენარები ოპტიმიზაციის მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით. სცენარების შერჩევა გრძელდება მანამ, სანამ არ მოიძებნება ისეთი სცენარი, რომელსაც შეეძლება კონკრეტული ქვეყნის პოტენციალი, საპროგნოზო დროის გასვლის შემდეგ, აიყვანოს მდგრადი განვითარების დონემდე. როგორც წესი, ასეთი სცენარი ედება საფუძვლად ქვეყნის მდგრადი განვითარების პროგრამას, რომლითაც უნდა იხელმძღვანელონ სამთავრობო სტრუქტურებმა ქვეყნის მშენებლობის პროცესში.

სწორედ ინტელექტუალური კაპიტალის ძალისხმევით შექმნილი მდგრადი განვითარების მათემატიკური მოდელების საფუძველზე მოახერხეს იაპონიამ და დასავლეთ გერმანიამ მოკლე დროში (4-5 წელიწადში) თავიანთი ეკონომიკის უმაღლეს დონემდე აყვანა მეორე მსოფლიო ომის შემდეგ, როცა მათი ხილული კაპიტალი ერთიანად განადგურებული იყო.

რამდენედაც ჩვენთვის ცნობილია, საქართველოში მდგრადი განვითარების მათემატიკური მოდელი ჯერ არ არის შემუშავებული და ამიტომ, ბუნებრივია, არც არსებობს ქვეყნის მდგრადი განვითარების სტრატეგიული პროგრამა. მიუხედავად იმისა, რომ რიგი წარმატებები ჩვენი ქვეყნის განვითარებისათვის საჭირო ცალკეულ სეგმენტებში სახეზეა და უდავოა (მაგალითად, მოხდა ხელისუფლების სამი დამოუკიდებელი შტოს გამიჯვნა, გადაიდგა დემოკრატიული განვითარების პირველი ნაბიჯები-პარლამენტარიზმის დამკვიდრება და სასამართლო რეფორმის დაწყება, თანამედროვე რეალობის გათვალისწინებით შეირჩა ზოგიერთი ფუნდამენტური ორიენტირი, რომლის ერთ-ერთი უშუალო შედეგიცაა კავკასიის ქვეყნებს შორის, პირველ რიგში, საქართველოს გაწევრიანება ევროსაბჭოში, პრაქტიკულად რეალიზებულია “აბრეშუმის გზის” – ევრაზიის დერეფნის პროექტის საწყისი ეტაპი და ა.შ.) სამწუხაროდ, ამ ტიპის წარმატებები არ განეკუთვნებიან იმ ძირითად მარეგულირებელ სტრატეგიულ ფაქტორებს, რომელთა მეშვეობითაც შეიძლება ქვეყნის გამოყვანა კრიზისიდან, რომელიც აგერ უკვე 9 წელიწადია გრძელდება.

უმოკლეს დროში და მინიმალური ფინანსური დანახარჯებით ადამიანური კაპიტალის ფართო გაგებით მდგრადი განვითარების დონემდე მისაყვანად საჭირო ინტელექტუალური პოტენციალი საქართველოს ჯერ კიდევ იმდენი გააჩნია, რომ ბარე მისი მასშტაბის ორ განვითარებულ ქვეყანას ეყოფა და თუ ამას დავუმატებთ ჯერ კიდევ გაჩანაგებისაგან გადარჩენილ ხილულ კაპიტალსაც, ცხადი გახდება, რომ იგი სიმდირით მსოფლიოში ბევრ ქვეყანას არ ჩამოუვარდება. აქედან აშკარაა ისიც, რომ იგი სიმდიდრით მსოფლიოში ბევრ ქვეყანას არ ჩამოუვარდება. აქედან აშკარაა ისიც, რომ უმოკლეს დროში მისი მიყვანა განვითარებული ქვეყნის დონემდე სავსებით რეალური და შესაძლებელია. ეს ამოცანა მკვლევარების,

პროფესიონალების გადასაჭრელი და შემუშავებულია. მას სხვა ვერ გაართმევს თავს. ასეა ყველა განვითარებულ ქვეყანაში და ასე უნდა იყოს ჩვენშიც. თუ ქვეყანაში რადიკალურად არ შეიცვლება სიტყვით გათავისებული და საქმით უარყოფილი მაღალ პროფესიული კადრების მოზიდვის მნიშვნელობის აუცილებლობა სახელმწიფო მართვის სტრუქტურებში, რეკორდულ დროში საქართველო გადაიქცევა კლასიკურ განვითარებად ქვეყანად, სატდანაც, როგორც ჩიხიდან, გამოსავალი აღარ იარსებებს. აღნიშნულ სფეროში მოწვეული უცხოელი სპეციალისტების რეკომენდაციები, რასაკვირველია, გათვალისწინებული უნდა იქნეს, მაგრამ ყოველთვის უნდა გახსოვდეს, რომ მათთვის პოსტ-საბჭოთა ქვეყნებში წარმოქმნილი რადიკალურად განსხვავებული პოლიტიკური, ეკონომიური და სოციალური პრობლემები სრულიად უცნობია და პრობლემის ამოხსნის თეორიული და პრაქტიკულად რეალიზებადი მეთოდოლოგია და მეთოდები მათ არ გააჩნიათ და არ შეიძლება ‚ქონდეთ მათი დახმარებითა და, ძირითადად, ჩვენი პროფესიონალების ძალისხმევით უნდა მოხდეს ქვეყნის განვითარებისათვის საჭირო ლოგიკურად გამართული და პრაქტიკულად რეალიზებადი მდგრადი განვითარების მოდელის შემუშავება, რომლის მიზანი იქნება ძლიერი და კონკურენტუნარიანი ფირმების შექმნა-აღორძინება, ფაქტიურად მკვდარი მრეწველობისა და სოფლის მეურნეობის გამოცოცხლება, მდიდარი და ფართო საშუალო ფენის შექმნა, რომლის გარეშეც ნამდვილი (და არა მოჩვენებითი) დემოკრატიული სახელმწიფოს მშენებლობა, მსოფლიოში ცივილური იმიჯის შექმნა და იქ ღირსეული ადგილის დამკვიდრება პრაქტიკულად შეუძლებელი იქმნება.

მდგრადი განვითარების მათემატიკური მოდელები, რომლებიც ნავითარებულ ქვეყნებს გააჩნიათ (იაპონია, გერმანია, სამხრეთ კორეა, ‚ონ-კონგი და ა.შ.) სტრუტურულად არ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. განსხვავება არსებობს მხოლოდ ძირითადად მარეგულირებელ პარამეტრებს შორის, რომლებიც სხვადასხვა ქვეყნისათვის, ბუნებრივია სხვადასხვა იქნება.

სტრუქტურულად ყველა მოდელი შეიძლება განვიხილოთ როგორც რეზერვუარების სისტემა, სადაც ყოველ i-რეზერვუარში გადის სითხის y_i რაოდენობა. დროის ნებისმიერი მომენტისათვის სითხის რაოდენობა i რეზერვუარში განისაზღვრება შემოსული და გასული სითხის ნაკადების სხვაობით

$U_i^+ - U_i^-$ ე.ი. $\frac{dy}{dt} = U_i^+ - U_i^-, i = 1,2,3...$ და. შ.

იგულისხმება, რომ თუ სისტემა ჩაკეტილია ნაკადების სიდიდე და მიმართულება დამოკიდებული იქნება სისტემის ყველა რეზერვუარებში დონეთა სხვაობებზე, ხოლო თუ სისტემა ღია იქნება, მაშინ მათი სიდიდე დამოკიდებული იქნება აგრეთვე გარეშე ცვლად ფაქტორებზე. გარდა ამისა, სისტემის რეგულირებადი პარამეტრები y_i შეიძლება დამოკიდებული იყოს ერთმანეთზე, წინასწარ ცნობილი ანალიტიკური თუ ექსპერიმენტალური კანონზომიერებით, რომლებსაც შეიძლება ‚ქონდეთ როგორც წრფივი, ასევე არაწრფივი ხასიათი. ბუნებრივია, რომ ზემოთ მოყვანილი არაწრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა შეიძლება ამოიხსნას მხოლოდ EGM-ზე, წინასწარ შერჩეული საპროგნოზო დროის ინტერვალისათვის, მოცემული მარეგულირებელი პარამეტრების და სხვა ცნობილი ფაქტორების გათვალისწინებით.

მოდელების რეალიზება ფაქტიურად სამი ეტაპისაგან შედგება:

პირველი ეტაპი ყოველთვის იწყება სამოქმედო პროგრამის კონცეპტუალური (სიტყვიერი) აღწერით, რომელიც უნდა შეიცავდეს დასახული ამოცანის ზუსტ ფორმულირებას. ამავე ეტაპზე ხდება შერჩევა იმ ძირითადი ცვლადი სიდიდეებისა (მდგრადი განვითარების რეგულირებადი პარამეტრები y_i), რომლებიც განსაზღვრავენ კონკრეტული ქვეყნის სამოქმედო პროგრამის (სისტემის) ყოფაქცევას მარეგულირებელი ფაქტორების გავლენით. (მაგალითად, რეგულირებადი პარამეტრის y_i= P- მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილება დროში დამოკიდებულია ისეთ მარეგულირებელ ფაქტორებზე როგორიცაა შობადობა, სიკვდილიანობა, დასაქმება, უმუშევრობა, ემიგრაცია, ურბანიზაცია და ა.შ.) აქვე ცდება ამორჩევა საპროგნოზო დროის ინტერვალისა, რომლის შემდეგ სისტემა უნდა გადავიდეს მდგრადი განვითარების დონეზე (მათემატიკურად ეს ხდება მაშინ, როდესაც არასტაციონალური ამოხსნები გარკვეული დროის გასვლის შემდეგ გადადის სტაციონალურში).

პირველი ეტაპი მთავრდება მიზეზობრივი დიაგრამის შედგენით, რომელიც გვიჩვენებს: რომელი მარეგულირებელი პარამეტრები და მათი კომბინაცია (ფატორები) მოქმედებენ თითოეულ რეგულირებად y_i ცვლადზე და რომელი მიმართულებით (ზრდის თუ ამცირებს ცვლადის სიდიდეს). მიზეზობრივი დიაგრამა იძლევა საშუალებას ცხადად წარმოვიდგინოთ რეგულირებადი და მარეგულირებელი პარამეტრების პირდაპირი და უკუკავშირები.

მიზეზობრივი დიაგრამის შედგენის დროს უნდა გამოვიდეთ იმ ფატორიდან, რომ ქვეყანა იმყოფება ღრმა კრიზისში და რომ ქვეყანაში უკვე არსებობს უაღრესად იცირე პროცენტი “მდიდრებისა” და

კატასტროფულად დიდი პროცენტი "ღარიბებისა", რომ ქვეყანაში ფაქტიურად არ არსებობს "საშუალო ფენა", რომლის ძალისხმევაზე არის, ძირითადად, დამოკიდებული ქვეყნის გადაქცევა განვითარებად ან განვითარებულ ქვეყნად.

პირველი ეტაპი, რომელიც კონცეპტუალურ ხასიათს ატარებს, ბუნებრივია, შეიცავს სუბიექტურ ფაქტორებს. მათი მოხსნა შესაძლებელია მხოლოდ მეორე და მესამე ეტაპების ამოქმედებით ამიტომ ქვეყნის გადარჩენის ყველა პროგრამა, რომელიც მხოლოდ კონცეპტუალურ ხასიათს ატარებს, ყოველთვის არა კორექტული და პოპულისტური იქნება. ამგვარი პროგრამების ნაკლებობა დღეს, სამწუხაროდ, არ იგრძნობა იმ მრავალპატიულობის ფონზე, რომელიც დღევანდელ საქართველოშია.

მეორე ეტაპი იწყება მდგრადი განვითარების მოდელის მათემატიკური აღწერით. ამისათვის პირველ ეტაპზე მიღებული მიზეზობრივი დიაგრამის გათვალისწინებით იგება ე.წ. ნაკადური დიაგრამა. ნაკადური დიაგრამა წარმოადგენს ერთმანეთისაგან ისრებით დაკავშირებულ რეზერვუარები ერთობლიობას და მათში გამავალ, ანალიტიკური ან ცხრილის სახით მოცემულ, ნაკადებს. ამგვარად, ყოველი რეგულირებადი ცვლადისათვის ცხადი სახით იწერება დროზე დამოკიდებული დიფერენციალური განტოლება. რეგულირებადი ცვლადებისაგან შედგენილი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც ნაკადური დიაგრამის პირდაპირ და უკუკავშირებს ითვალისწინებს, მოცემული საწყისი პირობებით და საპროგნოზო დროითი ინტერვალით, წარმოადგენს მდგრადი განვითარების მათემატიკურ მოდელს. ძირითადი ცვლადების რაოდენობა (რეგულირებადი პარამეტრები), რომელთა ყოფაქცევაზეც დამოკიდებულია კონკრეტული ქვეყნის მდგრადი განვითარების პოლიტიკა, წინასწარ ირჩევა პირველ ეტაპზე მიზეზობრივი დიაგრამის შედგენის დროს. ამგვარად, მეორე ეტაპი მთავრდება ქვეყნის განვითარების მათემატიკური მოდელის შექმნით.

მესამე ეტაპი ეძღვნება მათემატიკური მოდელის ანალიზს. ამისათვის ხდება ნაკადური დიაგრამის საშუალებით მიღებული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირება EGM-ზე და მიღებული შედეგების შედარება წინასწარ ცნობილ მონაცემებთან, რომლებიც, ძირითადად, განსაზღვრავენ მოდელირებული სისტემის (ქვეყნის სოციალურ-ეკონომიური მდგომარეობის) ყოფაქცევას დროის მოცემული მომენტისათვის. ამავე ეტაპზე ხდება ისეთი მარეგულირებელი ფაქტორების გამოვლენა, რომლის მიმართაც განსაკუთრებით მგრძნობიარეა მოდელი. პარამეტრების ვარირებით უნდა შევეცადოთ მივიღოთ დამაკმაყოფილებელი პასუხი იმ კითხვაზე, რისთვისაც შედგენილი იქნა მოდელი.

თუ მოდელი არ გავიდა ჩვენთვის საჭირო საპროგნოზო სტაციონალურ დონეზე, EGM-ზე ხდება სამივე ტიპის გამეორება, რეგულირებადი და მარეგულირებელი პარამეტრების დაზუსტება, ანუ პირველ ეტაპზე მიღებული სუბიექტური ფაქტორების თანდათანობით მოხსნა. ასე გრძელდება მანამ, სანამ მოდელი არ ჩაითვლება საკმარისად კარგ მიახლოებად იმ პასუხისა, რისთვისაც დაისვა მოცემული ამოცანა. მიგვაჩნია, რომ ასეთი ტიპის სამუშაოს ჩატარება და საქართველოს მდგრადი განვითარების მათემატიკური მოდელის შექმნა არის უპირველესი უპირობო და გადაუდებელი ამოცანა ჩვენი ქვეყნისათვის.

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ თუ როგორ ხორციელდება კონკრეტულად ქვეყნის განვითარების პროგრამის შედგენა და მისი მოდელირება, განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა და დავადგინოთ რომელიმე ერთი რეგულირებადი ფუნქციის, მაგალითად, P მოსახლეობის რაოდენობის ხასიათი თ საპრგნოზო დროის ინტერვალში.

მოსახლეობის P რაოდენობის ზრდის ტემპი, ბუნებრივია, დამოკიდებული უნდა იყოს როგორც შობადობის A, ასევე სიკდილიანობის B რაოდენობათა ინტენსივობების სხვაობაზე ე.ი. შეიძლება დავწეროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dP}{dt} = A - B. \qquad (1)$$

გამოვიკვლიოთ ეს განტოლება როგორც ანალიზურად, ასევე მოდელირების საშუალებით.

ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი გ ა ნ ხ ი ლ ვ ა

ანალიზური განხილვის დროს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ შობადობა და სიკვდილიანობა, პირველ რიგში უნდა იცვლებოდეს ქვეყანაში მდედრობითი P_1 და მამრობითი P_2 სქესის ადამიანების პროპორციულად, ე.ი. ზოგადად შეიძლება დავწეროთ

$$A = \alpha' P_1 P_2; \quad B = \beta' P_1 P_2, \qquad (2)$$

სადაც $0<\alpha'<1$; $0<\beta'<1$ პროპორციულობის კოეფიციენტებია. გარკვეული სიზუსტით ყოველთვის შეიძლება ავიღოთ $P_1 \approx P_2 \approx \underline{P}$.

ამ შემთხვევაში განტოლება (1) მიიღებს არაწრფივ ხასიათს.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\alpha' - \beta'}{4} P^2. \tag{3}$$

განზომილებათა დაცვის გათვალისწინებით α' და β' კოეფიციენტები, ზოგადად, შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{P_0}; \beta' = \frac{\beta}{P_0}, \tag{4}$$

სადაც P_0 მოსახლეობის რაოდენობის გარკვეული მუდმივი რიცხვია, ხოლო α და β კოეფიციენტები რეგულირებადი ცვლადების (P, k, x, R, Z და ა.შ.) და მარეგულირებელი ფაქტორების (მოსახლეობის გრადაცია წლოვანების მიხედვით, ქვეყნის სასიცოცხლო ტერიტორიის შემოსაზღვრულობა, საკვები პროდუქტების საკმარისობა ერთ სულ მოსახლეზე, უმუშევრობა, დასაქმება, ურბანიზაცია და ა.შ.) ფუნქციებს წარმოადგენენ [1].

ვიპოვოთ მე-(3) განტოლების ანალიზური ამოხსნები და შევაფასოთ ისინი α და β კოეფიციენტების სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს:

ა) განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა კოეფიციენტები α და β მუდმივი სიდიდეებია და დავუშვათ, რომ შობადობა აჭარბებს სიკვდილიანობა ე.ი. $\alpha > \beta$. ამ შემთხვევაში თუ მოვახდენთ (3) განტოლების ინტეგრირებას, რომელიღაც t_0 მომენტიდან t მომენტამდე, მივიღებთ

$$P(t) = \frac{4}{(\alpha - \beta)} \cdot \frac{P_0}{(t_ქ - t)}, \tag{5}$$

სადაც $t_ქ = t_0 + \frac{4P_0}{(\alpha - \beta)P(t_0)} \phi\ t_0$.

მე-(5) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ როდესაც t ტოლი გახდება $t_ქ$ –ის, ქვეყნის მოსახლეობის რაოდენობა უნდა გახდეს უსასრულოდ დიდი. შრომაში [2] მე –(5) ფორმულის საშუალებით და მოსახლეობის მსოფლიო მასშტაბით ზრდის ტემპის ექსპერიმენტული მონაცემების საფუძველზე მიღებული იქნა კურიოზული დასკვნა, რომ მსოფლიოს მოსახლეობის რაოდენობა უსასრულობას მიაღწევს 2023 წლის 13 ნოემბერს, რაც რასაკვირველია, აბსურდია.

ასევე აბსურდულ შედეგამდე მივალთ, თუ დავუშვებთ პირიქით, რომ $\beta > \alpha$ ე.ი. როცა სიკვდილიანობა აჭარბებს შობადობას. მე-(3) განტოლების ინტეგრებით გვექნება

$$P(t) = \frac{4}{(\beta - \alpha)} \cdot \frac{P_0}{(t_ქ + t)}, \tag{6}$$

სადაც $t_ქ = \frac{4P_0}{(\beta - \alpha)P(t)} - t_0$.

თუ აღნიშნული ფორმულით ვიანგარიშებთ მოსახლეობის რადენობის შემცირებას მეთექვსმეტე საუკუნიდან დღემდე, მივიღებთ, რომ მეოცე საუკუნეში კაცობრიობა აღარ უნდა არსებულიყო.

ამგვარად, α და β კოეფიციენტების მუდმივობას მივყავართ აბსურდულ შედეგებამდე.

ბ). დავუშვათ α კოეფიციენტი როგორც ცვლადი სიდიდე, მაგალითად

$\alpha(P) = \frac{\alpha_0 P_0}{P}$, ხოლო β კოეფიციენტი მუდმივად β_0–ის ტოლი.

ამ შემთხვევაში, მე-(3) განტოლების ამოხსნა რადიკალურად შეიცვლება და იგი დაზღვეული იქნება ზემოთ განხილული აბსურდული შედეგებისაგან. მართლაც, ადვილია ჩვენება, რომ მე-(3) განტოლების ამოხსნას, როდესაც $\alpha = \frac{\alpha_0 P_0}{P}$ და $\beta = \beta_0$ ექნება სახე:

$$P(t) = \frac{P_{CT}}{1-\left[1-\frac{P_{CT}}{P(0)}\right] l^{-\frac{\alpha_0}{4}}}, \qquad (7)$$

სადაც $P_{CT} = \frac{\alpha_0}{\beta_0} P_0.$

როგორც ამოხსნიდან ჩანს, როცა t=0 P(t) $\to$ P(0), ხოლო როცა t $\to \infty$ P(t) $\to$P $_{CT}$.

ამგვარად, შობადობის ფაქტორის რეგულირებით $\left(\alpha(P) = \frac{\alpha_0 P_0}{P}\right.$ - შერჩევით), მოსახლეობის P რაოდენობის ცვლილება დროში ყლველთვის შეიძლება მივიყვანოთ მდგრადი განვითარების დონემდე (გარკვეულ სტაციონარულ მნიშვნელობამდე).

ამავე მდგრადი განვითარების დონემდე მივალთ, თუ შობადობისა და სიკვდილიანობის ფაქტორებს შევარჩევთ შემდეგნაირად:

$$\alpha(P) = \frac{\alpha_0 P_0^2}{}; \beta(P) = \frac{\beta_0 P_0}{P} \qquad (8)$$

ამ შემთხვევაში მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის ტემპის (3)-ე განტოლება გახდება წრფივი

$$\frac{dP}{dt} = P_{CT} - P, \qquad (9)$$

რომლის ზოგად ამოხსნას ექნება სახე:

$$P(t) = P(0) l^{-\tau} + P_{CT}\left(1 - l^{-\tau}\right). \qquad (10)$$

აქ $P_{CT} =$, ხოლო როცა $\tau \to 0$ P(ტ)$\to$P(0), $\tau \to \infty$ P(ტ)$\to$Pჩთ. როგორც არაწრფივი (7), ასევე წრფივი (10) ამოხსნები გვიჩვენებენ, რომ ფაქტიურად და დროის გასვლის შემდეგ ამოხსნები "ივიწყებენ" საწყის პირობებს და სტაციონალურ მდგომარეობამდე გასვლამდე, მოსახლეობის ზრდის ტემპის ცვლილება მთლიანად მარეგულირიბელი ფაქტორების სწორად შერჩევის ხასიათზე იქნება დამოკიდებული. მართლაც, როცა $t \approx \frac{4}{\alpha}$ და $t \approx \frac{4}{\beta_0}$ (7)-ე და მე-(10) ამოხსნებიდან, სათანადოდ, მივიღებთ საპროგნოზო ფორმულებს:

$$P(t) \approx \frac{P_{CT}}{1 - l^{-\frac{\alpha_0}{4}t}}; \quad P(t) \approx P_{CT}\left(1 - l^{-\frac{\alpha_0}{4}t}\right), \qquad (11)$$

სადაც აღარ ფიგურირებს საწყისი პირობები და მათი ცვლილება ცალსახადაა დამოკიდებული მარეგულირებელ პარამეტრებზე.

ანალიზური განხილვიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დასკვნა: რეალურად არსებული მარეგულირებელი პარამეტრების რაციონალური შერჩევით და მათი მართვით ყოველთვის შეიძლება რეგულირებადი ფუნქცია, გარკვეული საპროგნოზო დროის გასვლის შემდეგ, გავიყვანოთ მდგრადი განვითარების იმ დონემდე, რომელსაც ითვალისწინებს კონკრეტული სამოქმედო პროგრამა.

მოსახლეობის რაოდენობის ზრდისტემპის მოდელირება

განვიხილოთ რეგულირებადი ფუნქციის-მოსახლეობის P(t) რაოდენობის ცვლილება დროში უმარტივესი მოდელის სახით.

აღვნიშნოთ ქვეყნის მოსახლეობის საწყისი რაოდენობა P_0 და ჩავთვალოთ, რომ ყოველდღიურად მათ მიეწოდებათ F საკვები პროდუქტების რაოდენობა (F= ცონსტ). მოსახლეობის P რაოდენობა დროში

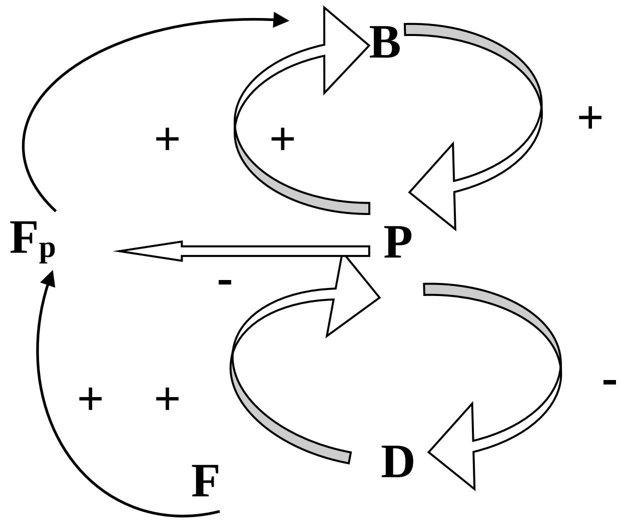
გაიზრდება B შობადობის გაზრდით და შემცირდება D სიკვდილიანობის გაზრდით. თავის მხრივ, შობადობა B დამოკიდებული იქნება P-ზე და აგრეთვე $F_P = \dfrac{F}{P}$ ფაქტორზე (საკვების რაოდენობა, რომელიც ჭირდება ერთ ადამიანს). სიკვდილიანობა D ასევე დამოკიდებული იქნება P-ზე და ადამიანის სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობაზე τ, რომელიც სიმარტივისათვის მუდმივად ჩავთვალოთ.

მიზეზობრივ დიაგრამას, რომელიც მოდელირების პირველ ეტაპს დაასრულებს, ექნება სახე (სურ.1):

სურ. 1-ზე ისრები გვიჩვენებენ, თუ რა რაზე მოქმედებს და რომელი მიმართულებით. სურათიდან ჩანს, რომ გვაქვს სამი უკუკავშირის მარყუჟი (B დან D-მდე, D-დან – P –მდე და P-დან F_P და B-და).

მეორე ეტაპზე გადასასვლელად საჭიროა განისაზღვროს $B(F_P)$ და $D(\tau)$ ფაქტორები ანალიზურად ან ცხრილის სახით. შემოვიფარგლოთ შემთხვევით, როცა ისინი განისაზღვრებიან ანალიზურად მარტივი ფორმულებით [1,3]:

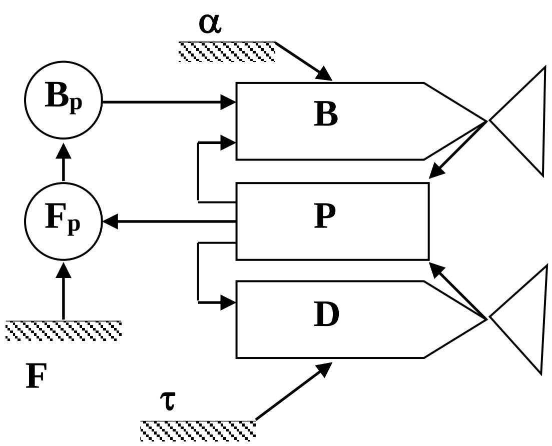
$$B = \alpha B_F \cdot P; \quad B_F = \frac{F}{P}; \quad D = \frac{P}{\tau} \qquad (12)$$



სურ. 1. მიზეზობრივი დიაგრამა მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების უმარტივესი მოდელისათვისა

ქ მუდმივი კოეფიციენტი α წარმოადგენს კუთრ შობადობას ნორმალურ პირობებში, როდესაც იდივიდუმი არ განიცდის საკვების უკმარისობას.

ამგვარად, მეორე ეტაპისათვის შეიძლება შევადგინოთ ნაკადური დიაგარამა (სურ. 2):



სურ. 2. ნაკადური დიაგრამა მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების უმარტივეს მოდელში

ნაკადურ დიაგრამაში აღნიშვნები აღებულია სისტემურ დინამიკაში მიღებული ცნობილი სიმბოლოების სახით [3]: მართკუთხედი გვიჩვენებს ფაზურ ცვლად სიდიდეს (P), მართკუთხედი სამკუთხედებით – ნაკადებს (B და D), წრე-ფაქტორებს (F_P), წრე ორი პარალელური ქორდით –

მარეგულირებელი ფუნქციის ანალიზურ ან ცხრილურ ჟამოკიდებულებას (B_F), თაროს აღმნიშვნელი სიმბოლო-მუდმივებს (α,F,τ).

მიზეზობრივი და ნაკადური დიაგრამების აგების აუცილებლობა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი ხდება, როდესაც რეგულირებადი ცვლადების რიცხვი ქვეყნის მდგრადი განივითარების პრგრამაში ერთზე მეტი ხდება და ეს დიფერენციალური განტოლების ნაცვლად, სათანადოდ უნდა ამოიხსნას არაწრფივ განტოლებათა სისტემა.

ნაკადური დიაგრამიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს მეორე ეტაპის შედეგი – დიფერენციალური განტოლება გამოსახულების რაოდენობის დროში ცვლილებისათვის

$$\frac{dP}{dt} B - D = \alpha F - \frac{P}{\tau} \tag{13}$$

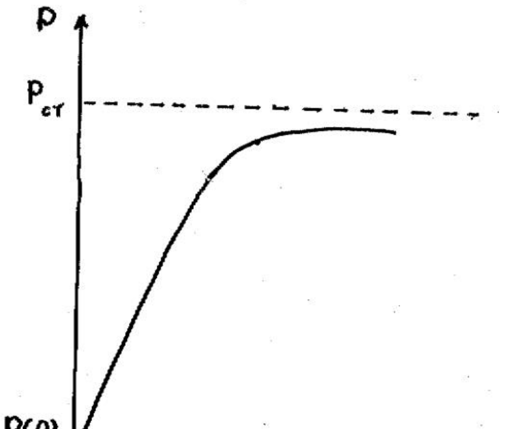
მოდელირების მესამე ეტაპისათვის საჭიროა ვიცოდეთ საწყისი მონაცემები: P_0, α, F, τ და საპროგნოზო დროის ინტერვალი თ.

ვინაიდან ყველა მარეგულირებელი ფაქტორები და მუდმივები მოცემულია ანალიზური სახით, მე-(13) განტოლება შეიძლება ამოიხსნა ზუსტად (EGM)-ის გარეშე

მე-(13) განტოლების ამოხსნას ექნება მე-(10) ფორმულის ანალოგიური სახე:

$$P(t) = P_0 l^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha F \tau \left(1 - l^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{14}$$

სურ.3.-ზე გამოსახულია მე-(14) ფორმულით მიღებული მოსახლეობის P(t) რაოდენობის დროში ცვალებადობა, როდესაც შობადობა B მუდმითია, ხოლო სიკვდილიანობა D P-ს სწრაფი ფუნქციაა. სურათიდან ჩანს, რომ მოსახლეობის რაოდენობა გადის მდგრადი განვითარების დონემდე და აღწევს პროგრამით გათვალისწინებულ სტაციონალურ მნიშვნელობას საპროგნოზო თ დროის ინტერვალში.



სურ. 3. ნაკადური დიაგრამა მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების უმარტივეს მოდელში

ვინაიდან რეალური ეკონომიკური ამოცანის დასმის დროს მარეგულირებელი ფაქტორები, ძირითადად, ცხრილების სახით არის მოცემული6 ხოლო რეგულირებადი ფუნქციები დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან ზოგადად არაწრფივი კანონზომიერებებით, EGM-ის გამოყენების გარეშე, საქართველოს მდგრადი განვითარების მათემატიკური მოდელის შექმნა პრაქტიკულად შეუძლებელია და, როგორც ზემოთ აღინიშნა ქვეყნისათვის ამ სასიცოცხლო პრობლემის გადაწყვეტა შესაძლებელია, მხოლოდ სხვადასხვა დარგის პროფესიონალი სპეციალისტების ერთობლივი ძალისხმევით.

ლიტერატურა – References- Литература

1. В.А.Егоров, Ю.Н.Каллистов, В.Б.Митрофанов, А.А. Пионтковский и «Математические модели глобплного развития». Л. Гидрометиздат, 1980.

2. Н.В.Змитренко, А.Р.Михайлов- «Явление инерции тепла» , Компютеры, модели Вычислительный эксперимент, Москва «Наука» 1988 г. стр.137.
3. J.W. Forrester, Principles of systems – Cambridge, mass; Wright Allen Press, Inc., 1968.

უაკ 62.501.72
ა.ხანთაძე, თ.გზირიშვილი, ღ.არველაძე
საქართველოს მდგრადი განვითარების მათემატიკურიმოდელის შესახებ

სტატიაში წარმოდგენილია საქართველოს მდგრადი განვითარების მათემატიკური მოდელის წინამძღვრები.
ნაშრომში, იმის საჩვენებლად თუ როგორ ხორციელდება კონკრეტულად ქვეყნის მდგრადი განვითარების პროგრამის შედგენა და მისი მოდელირება, განხილულია მარტივი შემთხვევა: გამოკვლეულია P (მოსახლეობის რაოდენობა) რეგულირებადი ფუნქციის ცვლილების ხასიათი თ საპროგნოზო დროის ინტერვალში.

UDC 62.501.72
A.Khantadze, T.Gzirishvili, G.Arveladze
On the mathematical model of sustainable development of Georgia

Prerequisites for creating a mathematical model of sustainable development of Georgia are discussed in the paper.
To demonstrate the way, how the elaboration of the program of country’s sustainable development and its modeling is implemented, the character of variation of a regulated function P (number of population) in a prognostic time interval T is considered.

УДК 62.501.72
А.Г.Хантадзе, Т.Г.Гзиришвили, Г.А.Арвеладзе
О математической модели устойчивого развития Грузии

Изложены предпосылки создания модели устойчивого развития Грузии.
Для демонстрации того, как конкретно осуществляется составление программы устойчивого развития страны и его моделирование, рассмотрен характер изменения регулируемой функции P (количество населения) в прогностическом интервале времени T.