მიხეილ ნოდიას გეოფიზიკის ინსტიტუტის შრომები, ტ. LXI, 2009
Transactions of Mikheil Nodia Institute of Geophysics, vol. LXI, 2009
Труды Института геофизики им. М. Нодиа, т. LXI, 2009

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ ИЗ КЛАССА П (KE_N, δ, D)

Капанадзе Д.В., Миндели П.Ш., Амилахвари З.Л.

Институт геофизики им. М.З Нодиа, 0193, Тбилиси, ул. М. Алексидзе 1.

Известно, что единичная масса в начале координатной системы и единичный круг $\Omega_1=\{x:|x|<1$ с постоянной плотностью $\delta=\frac{1}{\pi}$ во внешней области R^2-Ω_1 имеют один и тот же логарифмический потенциал, т.е.

$$\ln\frac{1}{|x|}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|y|<1}\ln\frac{1}{|x-y|}dy, \qquad |x|>1 \tag{1}$$

Кроме того для эллипса

$$S_2=\left\{(x_1,x_2):\frac{x_1^2}{a_2}+\frac{x_2^2}{b^2}\le 1\right\} \quad (c^2=a^2-b^2),$$

с постоянной плотностью и отрезок (-c, c) с переменной плотностью ψ_1 во внешней области R^2-S_2 имеют один и тот же логарифмический потенциал. Следовательно, эллипс S_2 и отрезок (-c, c) с плотностью ψ_1 – гравиметрически эквивалентные тела

$$\int\limits_{S_2}\ln\frac{1}{|x-y|}dy=\int\limits_{-c}^{c}\psi_1(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dS_y \qquad x\in R^2-S_2 \tag{2}$$

Введем некоторые определения. Пусть Q односвязная кусочно-гладкая ограниченная область на плоскости R^2. Мы скажем, что для области Q с плотностью δ=const существует правильное сингулярное эквивалентное распределение, если выполняются следующие условия [1, с.6].

1. Существует множество (замкнутое) $E\subset\overline{Q}$, для которого двухмерная мера Лебега равна нулю и Ω-E – связанное множество (Ω-E есть область).

2. На компакте E существует обобщенная мера μ такая, что

$$\int\limits_{Q}\delta\ln\frac{1}{|x-y|}dy=\int\limits_{E}\ln\frac{1}{|x-y|}d\mu(y) \qquad x\in R^3-Q \tag{3}$$

(E, μ) называется правильное (свойство 1) сингулярное эквивалентное распределение (свойство 2). [1, с.6].

Равенство (1) означает, что единичная масса в центре круга для единичного круга есть правильное сингулярное эквивалентное распределение (СЭР), а отрезок (-c, c) с плотностью ψ^1 есть правильное сингулярное эквивалентное распределение для эллипса. [1, 2].

Теперь рассмотрим односвязную ограниченную область Ω, граница которой удовлетворяет условию: каждая гладкая часть для ∂Ω есть отрезок прямой или дуга некоторой окружности. Предполагается, что граница содержит по крайней мере один отрезок

$$\int_{\Omega} u(y)dy = \int_{E} u(y)\mu_1(y)dS_y, \qquad \mu_1 = \frac{\mu}{\delta}$$

где u – гармоническая функция из пространства $C(\overline{\Omega})$.

Заметим, что в области существует решение задачи Дирихле для любой непрерывной функции $g \in C(\partial\Omega)$. Из (5) следует, что

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V^f(x)}{\partial x_2} dx = \int_{E} \frac{\partial V^f(x)}{\partial x_2} \mu_1(y)dS_y, \qquad f \in C(S),$$

где $S = \{x : R_1 < |x| < R_2\}$, $\overline{\Omega} \subset S_1\{x : |x| < R_1\}$. Очевидно, что V^f – гармоническая функция из $C(\overline{\Omega})$. Из последнего интегрального равенства, в силу формулы Грнна-Гаусса, получаем

$$\int_{\partial\Omega - I} V^f(x)\cos(\hat{\nu}_x x_2)dS_x = \int_{E} W^f(x)\mu_1(y)dS_y \tag{5}$$

Интеграл на I равен нулю $(\cos(\hat{\nu}_x x_2) = 0, x \in I, \nu_x \perp ox_2)$,

где

$$W^f(y) = \int_{S} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x_2} f(x)dx$$

Интегральное равенство (5) можно переписать

$$\int_{S_1} U^{\nu_1}(x)f(x)dx = \int_{S} W^{\mu_1}(x)f(x)dx,$$

Здесь $\psi_1(x) = \cos(\hat{\nu}_x x_2)$, $\quad x \in \partial\Omega - I$. Из последнего интегрального равенства получаем

$$U^{\psi_1}(x) = W^{\mu_1}(x), \qquad x \in S. \tag{6}$$

Поскольку $\Omega - E$ связанное множество и $\psi_1(x)=0$, $x \in I$, то равенство (6) выполняется также на Ω-E. Таким образом равенство (6) выполняется на R^2-E.

Пусть $e_1 \in \partial\Omega$– дуга некоторой окружности. По условию граница $\partial\Omega$ содержит хотя бы одну дугу окружности. Пусть далее, $x_0 \in e_1 \subset \partial\Omega$ некоторая гладкая точка для $\partial\Omega$. $\sigma_1 = \{x : |x - x_0 < \varepsilon_1|\} \cap \partial\Omega$ – гладкая дуга на $\partial\Omega$, ε_1 – достаточно малое число. Можно предполагать, что вектор $\nu_{x_0}=\nu_0$ – параллелен оси ox_1. В противном случае для равенства (6) сделаем поворот координатной системы, после которого $\nu \| ox_1$. Для любой плотности $\psi \in C(\sigma_2)$, $\quad \sigma_2 = \left\{x = (x_1 x_2) : |x - x_0| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \quad x_2 > x_2^0\right\}$ имеем

$$\int_{\partial\Omega - I} U^{\psi}(x)\cos(\hat{\nu}_x x_2)dS_x = \int_{E} W^{\varphi}(x)\mu(x)dS_x.$$

Отсюда получаем

$$\int_{\sigma_2} U^{\psi}(x)\cos(\hat{\nu}_x x_2)dS_x = \int_{E} W^{\psi}(x)\mu_1(x)dS_x - \int_{F} U^{\psi}(x)\cos(\hat{\nu}_x x_2)dS_x \tag{7}$$

где $F = \partial\Omega - I - \sigma_2$, $\qquad \cos(\hat{\nu}_x x_2) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + [\tau'(x_1)]^2}}$.

Здесь $x_2 = \tau(x_1)$ – уравнение σ_2, $\quad x_1 \in (a,b) = \{x_1 : (x_1, x_2) \in \sigma_2$.

Поскольку $\nu_0 \| ox_1$, то касательная прямая в точке x_0 параллельна оси ox_2. Значит $\tau'(x_1^0) = \pm\infty$. Кроме того нетрудно доказать, что

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{1+[\tau'(x_1)]^2}}=\frac{\tau'(x_1)\cdot\tau''(x_1)}{\left[1+[\tau'(x_1)]^{\frac{3}{2}}\right]}.$$

Известно, что выражение

$$\rho(x_1,x_2)=\left|\frac{\tau''(x_1)}{\{1+[\tau'(x_1)]\}^{\frac{3}{2}}}\right|$$

есть кривизна кривой σ_1 в точке $(x_1, x_2)\in\sigma_2$. Отметим, что кривизна дуги σ_1 окружности постоянна, которая отлична от нуля.

Для завершения доказательства понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $\psi\in C(\sigma)$, тогда справедливо неравенство

$$\|\psi\|_{\{C^3(\sigma)\}^*}\le C\|U^\psi\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*}, \qquad (8)$$

где $\sigma=\left\{x:|x-x_0|<\frac{\varepsilon_1}{4}\right\}\cap\sigma_2$, $\omega=\left\{x:|x-x_0|<\frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$, $C_0^1(\omega)$ – подпространство финитных функций из $C^1(\omega)$, $\overline{\omega}\cap E=\varnothing$.

Доказательство леммы. Для любой функции $f\in C_0^3(\omega)$ имеем

$$\int_\sigma\psi(x)f(x)dS_x=-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\psi(x)V^{\Delta f}(x)dS_x=-\frac{1}{4\pi}\int_\omega U^\psi(x)\Delta f(x)dx$$

Отсюда получаем

$$\underset{\|f\|_{\{C_0^3(\omega)\}}\le1}{SUP}\left|\int_{\sigma_2}\psi(x)f(x)dS_x\right|\le C\underset{\|g\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*}}{SUP}\left|\int_\omega U^\psi(x)g(x)dx\right|$$

Следовательно

$$\|\psi\|_{\{C^3(\sigma)\}^*}\le C\|U^\psi\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*} \qquad (9)$$

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим единичный шар

$$\Psi_1=\left\{\|U^\psi\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*}\le1,\qquad \psi\in C(\sigma)\right\}$$

Возьмем функционал из Φ_1

$$L=\pm\frac{\partial\delta_{x_1}}{\partial t_1}\times\delta_{x_2}\qquad (x_1x_2)\in\sigma,$$

где $\delta_{x_1},\delta_{x_2}$ – одномерные меры Дирака, а

$$\frac{\partial\delta_{x_1}}{\partial t_1}\left\{\left(\frac{\partial\delta_{x_1}}{\partial t},g(t_1)\right)=-\frac{\partial g(x_1)}{\partial t_1}\right\},\qquad g_1\in C_0^1(R^1)$$

Обобщенная производная [3] меры Дирака δ_{x_1}. Нетрудно видеть, что функционал L $\in\Phi_1$. Пусть $U^\psi=L$, $\psi\in\{C^3(\sigma)\}^*$.

Из равенства (7) получаем

$$\left|\pm\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{1+[\tau'(x_1)]^2}}\right|\le C_1\|\psi\|_{\{C^3(\sigma)\}^*}+C_2\|\psi\|_{\{C^3(\sigma)\}^*}\le C_4\|U^\psi\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*}\le C_4. \qquad (10)$$

Левую сторону можно переписать

$$\left|\frac{\tau'(x_1)\cdot\tau''(x_1)}{\{1+[\tau'(x_1)]^2\}^{\frac{3}{2}}}\right|=|\tau'(x_1)|\left|\frac{\tau''(x_1)}{\{1+[\tau'(x_1)]^2\}^{\frac{3}{2}}}\right|=|\tau'(x_1)|\cdot\rho(x_1,x_2).$$

Перейдем к пределу, когда $x_1 \to x_1^0$. Из (10) и из последнего равенства получаем $(\rho(x_1, x_2) = const, \qquad x \in \sigma)$

$$\infty \leq C_4 = const.$$

Мы пришли к противоречию. Полученное противоречие доказывает теорему в случае естественного регулярного СЭР.

В случае квазирегулярного СЭР теорема доказывается аналогично тому, как это делается для регулярного СЭР.

Теперь рассмотрим ограниченную, кусочно-гладкую односвязную область Ω, которая удовлетворяет условиям: любая гладкая часть границы ∂Ω принадлежит C^∞, граница ∂Ω содержит некоторый отрезок прямой линии и существует гладкая точка $x_0 \in \partial\Omega$, для которой кривизна $\rho(x_0) \neq 0$. Тогда справедливо обобщение доказанного утверждения.

Теорема 2. Пусть односвязная, ограниченная область Ω удовлетворяет сформулированным условиям. Тогда область Ω не имеет естественного регулярного СЭР. Кроме того, Ω не имеет также естественного квазирегулярного СЭР.

Для доказательства теоремы 2 достаточно повторить рассуждения теоремы 1.

Теперь рассмотрим трехмерное пространство R^3. Пусть $\Omega \subset R^3$ – односвязная ограниченная, кусочно-гладкая область, которая удовлетворяет условиям: граница ∂Ω содержит некоторый круг и часть поверхности некоторого шара (круг – часть некоторой плоскости).

Теорема 3. Пусть область $\Omega \subset R^3$ удовлетворяет сформулированным условиям. Тогда область Ω не имеет естественного регулярного СЭР. Кроме того, Ω не имеет также естественного квазирегулярного СЭР.

Для доказательства теоремы 3 используются ньютоновские потенциалы

$$V^f(x) = \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} f(y)dy, \qquad f \in C(\overline{\Omega}),$$

$$U^\psi(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|} \psi(y)dS_y, \quad \psi \in C(\partial\Omega)$$

Заметим, что в трехмерном случае множество $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, где E_1 – кусочно-гладкие поверхности, E_2 – кусочно-гладкие кривые, E_3 – изолированные точки. Предполагается, что $\Omega - E$ – связанное множество.

Литература

1. Страхов В.Н. Нерешенные проблемы математической теории плоской задачи гравиметрии и магнитометрии. Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. №8. С. 3-28.

2. Страхов В.Н. Некоторые примеры эквивалентности и слабой единственности плоской обратной задачи потенциала. Изв. АН СССР. Физика Земли. 1973. № 5 С. 39-62.

3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. Москва, Наука. 1979. С. 318.

ეკვივალენტური განაწილების შესახებ არეებისათვის Π (KE_N, δ, D) კლასიდან

კაპანაძე ჯ., მინდელი პ., ამილახვარი ზ.

რეზიუმე

განხილულია ამოცანა ეკვივალენტური განაწილების შესახებ არეებისათვის Π (KE_N, δ, D) [1] კლასიდან ორგანზომილებიან შემთხვევაში. დამტკიცებულია, რომ არისათვის $\Omega \in \Pi$ (KE_N, δ, D) არ არსებობს ბუნებრივი რეგულარული სინგულარული ეკვივალენტური განაწილება და არც ბუნებრივი კვაზირეგულარული სინგულარული ეკვივალენტური განაწილება.

ჩამოყალიბებულია დამტკიცებული თეორემის განზოგადება სამგანზომილებიან სივრცეში ნიუტონის პოტენციალებისათვის.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ ИЗ КЛАССА Π (KE_N, δ, D)

Капанадзе Д.В., Миндели П.Ш., Амилахвари З.Л.

Реферат

Рассматривается задача о сингулярных эквивалентных распределениях для областей из класса Π (KE_N, δ, D) на плоскости R^2. Доказывается, что для области $\Omega \in \Pi$ (KE_N, δ, D) [1] естественное регулярное сингулярное эквивалентное распределение (СЭР) не существует. Кроме того, устанавливается, что для области $\Omega \in \Pi(KE_N,\delta,D)$ естественное квазирегулярное СЭР не существует.

Формулируется обобщение доказанного утверждения в пространстве R^3.

ONEQUIVALENT DISTRIBUTIONS FOR DOMAINS FROM Π (KE_N, δ, D)

Kapanadze D., Mindeli P., Amilakhvari Z.

Abstract

It is proved that for the domains belonging to the class Π (KE_N, δ, D) (see [1]) there is no natural regular SED. Moreover, there is no even natural quasi-regular SED. A generalization of these assertions is given . Finally, the results are extended to Newtonian potentials.