მიხეილ ნოდიას გეოფიზიკის ინსტიტუტის შრომები, ტ. LXII, 2010
Transactions of Mikheil Nodia Institute of Geophysics, vol. LXII, 2010
Труды Института геофизики им. М. Нодиа, т. LXII, 2010

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ДЛЯ КОТОРОГО ВСЕ ТОЧКИ ОБЛАСТИ ЯВЛЯЮТСЯ ОСОБЫМИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА

Капанадзе Д.В.

Институт геофизики им. М.З. Нодиа, 0193, Тбилиси, ул. М. Алексидзе, 1.

Исследование природы особых точек потенциальных полей очень важно для аналитического продолжения аномалий силы тяжести.

В этой статье исследуется вопрос об особых точках потенциальных полей на плоскости R^2 в случае логарифмического потенциала и в трехмерном пространстве R^3 для ньютоновского потенциала.

Отметим, что особые точки потенциальных полей применяются в монографии В.М.Березкина [1], и построен метод полного нормированного градиента.

Естественный интерес представляет случай, когда все точки области являются особыми для потенциала. В работе В.Н. Страхова [2, с. 116] отмечается , что вопрос о том, что все точки области являются особыми для потенциала до сих пор остается открытым.

Введем некоторые обозначения. Логарифмический потенциал плотности $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ определяется следующим образом [3]

$$V^{\varphi} = \int_{\Omega} \Gamma(x,y)\varphi(y)dy, \qquad (1)$$

где Ω – гладкая ограниченная область из класса C^2 на плоскости R^2, $\Gamma(x,y) = \ln|x-y|^{-1}$, $x \in R^2$, $y \in R^2$.

Рассмотрим функцию Вейерштрасса [4, с. 360]. Эта функция определяется рядом

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x_1), \quad 0 < b < 1,\ x_1 \in (-\infty, \infty).$$

Предположим, что $ab > 1 + 2\pi$. Известно, что если $ab > 1 + 2\pi$, то функция f не имеет конечной производной ни при каком значении $x_1 \in (-\infty,\infty)$ [4, с. 361]. Кроме того, функция f непрерывна в каждой точке $x_1 \in (-\infty,\infty)$. Пусть μ – плотность на области Ω из пространства $C(\bar{\Omega})$.

Определение. Мы скажем, что точка области $x = (x_1, x_2)$ есть особая точка логарифмического потенциала V^{μ}, если какая-нибудь производная потенциала V^{μ} порядка j не существует в точке $x \in \Omega$ или равна бесконечности $j = 1, 2, \ldots$.

Теорема. Пусть Ω – гладкая ограниченная область из класса C^2. Каждая точка $x \in \Omega$ есть особая точка для потенциала V^{μ_1}, где $\mu_1(x_1,x_2) = f_1(x_1)$, $(x_1,x_2) \in \Omega$, а

$$f_1(x_1) = \int_0^{x_1} f(t)dt \quad (\mu_1 \in C^1(\bar{\Omega})).$$

Доказательство. Без уменьшения общности можно предполагать, что

$$\bar{\Omega} \subset \{(x_1,x_2):\ x_1 > 0\}.$$

Рассмотрим хорошо известное равенство

$$\frac{\partial^2 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=-2\pi\mu_1(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Omega. \qquad (2)$$

Поскольку $\mu_1(x_1,x_2)=f_1(x_1)\in C^1(\bar{\Omega})$, то производная потенциала V^{μ_1} порядка $j=2$ существует $\left(f_1'(x_1)=f(x_1)\right)$. Очевидно, что из (2) имеем

$$\frac{\partial^2 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+2\pi\mu_1(x_1,x_2)=-\frac{\partial^2 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \qquad (3)$$

Рассмотрим производную по x_1 для равенства (3)

$$\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}+2\pi f(x_1)=-\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2^2}. \qquad (4)$$

Если из (4) какая-нибудь производная не существует или равна бесконечности, то точка $x=(x_1,x_2)$ – особая точка потенциала V^{μ_1}.

Теперь предположим, что производные из равенства (3) существуют. Отсюда получаем

$$2\pi\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\right|\le\left|\frac{\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1+h,x_2)}{\partial x_1^3}-\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}}{h}\right|+\left|\frac{\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1+h,x_2)}{\partial x_1\partial x_2^2}-\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2^2}}{h}\right|.$$

Поскольку [4, с. 362]

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\right|=\infty \quad x_1\in(-\infty,\infty),$$

то получаем

$$\infty\le\left|\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1+h,x_2)}{\partial x_1^3}-\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}}{h}\right|+\left|\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1+h,x_2)}{\partial x_1\partial x_2^2}-\frac{\partial^3 V^{\mu_1}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2^2}}{h}\right|.$$

Если какой-нибудь предел не существует, то по определению $x=(x_1,x_2)$ – особая точка потенциала V^{μ_1}. Если предельные значения существуют, то правая сторона равна бесконечности. Отсюда следует, что $x=(x_1,x_2)$ – особая точка потенциала V^{μ_1}.

Таким образом, каждая точка $x\in\Omega$ есть особая точка потенциала V^{μ_1}.

Теперь рассмотрим трехмерное пространство. Пусть $f(t)$ - функция Вейерштрасса [4, с. 360].

Обозначим

$$f_1(x_1)=\int_0^{x_1} f(t)dt,$$

$$V^{\mu}(y)=\int_{\Omega}\frac{\mu(x)dx}{|x-y|}.$$

Без уменьшения общности предположим, что гладкая ограниченная область $\Omega\subset\{(x_1x_2x_3).\ x_1>0\}$. Определим плотность μ на Ω следующим образом $\mu(x_1x_2x_3)=f_1(x_1)$. Очевидно, что $\mu\in C^1(\Omega)$. Следовательно справедливо равенство для потенциала V^{μ}

$$V^{\mu}(x)=\int\limits_{\Omega}\frac{\mu(y)dy}{|x-y|}, \qquad \frac{\partial^2 V^{\mu}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V^{\mu}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V^{\mu}}{\partial x_3^2}=-4\pi\mu(x_1x_2x_3),\ (x_1,x_2,x_3)\in\Omega.$$

Рассмотрев производную по x_1 получим

$$\frac{\partial^3 V^{\mu}}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 V^{\mu}}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 V^{\mu}}{\partial x_1\partial x_3^2}=-4\pi f_1(x_1).$$

Теперь снова рассмотрим производную по x_1 последнего равенства

$$\frac{\partial^4 V^{\mu}(x)}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 V^{\mu}(x)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 V^{\mu}(x)}{\partial x_1^2\partial x_3^2}=-4\pi\frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1},\ \ x=(x_1x_2x_3)\in\Omega.$$

Ясно, что

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\le\frac{1}{4\pi}\left[\left|\frac{\partial^4 V^{\mu}(x)}{\partial x_1^4}\right|+\left|\frac{\partial^4 V^{\mu}(x)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right|+\left|\frac{\partial^4 V^{\mu}(x)}{\partial x_1^2\partial x_3^2}\right|\right]\ (x_1x_2x_3)\in\Omega.$$

Известно, что [4, с. 462]

$$\left|\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}\right|=\infty \quad x_1\in(-\infty,\infty).$$

Из предыдущего неравенства следует, что какая-нибудь производная потенциала V^{μ} или не существует, или равна бесконечности. Это означает, что каждая точка области $x=(x_1x_2x_3)\in\Omega$ особая точка потенциала. Таким образом, в трехмерном пространстве существует распределение μ, для которого каждая точка области Ω - особая для потенциала V^{μ}.

Литература

1. *Березкин В.М.* Метод полного градиента при геофизической разведке. М.: Недра, 1988.
2. *Страхов В.Н.* О путях построения математической теории интерпретации магнитных и гравитационных аномалий. – Прикладная математика. Вып. 35, 1965. С. 95 – 130.
3. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966.
4. *Титчмарш Е.* Теория функции. – М.: Наука, 1980.

განაწილება, რომლისთვისაც არის ყოველი წერტილი განსაკუთრებულია პოტენციალისათვის

კაპანაძე ჯ.ვ.

რეზიუმე

სტატიაში მოცემულია უწყვეტი განაწილების განსაზღვრა, რომლისთვისაც არის ყოველი წერტილი წაროადგენს განსაკუთრებულ წერტილს პოტენციალისათვის.

განხილულია როგორც ორგანზომილებიანი სიბრტყე, ისე სამგანზომილებიანი სივრცე, ე.ი. ლოგარითმული პოტენციალები და ნიუტონის პოტენციალები.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ДЛЯ КОТОРОГО КАЖДАЯ ТОЧКА ОБЛАСТИ ОСОБАЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА

Капанадзе Д.В.

Реферат

В статье дается определение непрерывного распределения, для которого каждая точка области является особой для потенциала.

Рассматривается как двухмерная плоскость, так и трехмерное пространство, т.е. логарифмические потенциалы и потенциалы Ньютона.

A DISTRIBUTION FOR WHICH EACH POINT OF A DOMAIN IS SINGULAR FOR THE POTENTIAL

D. Kapanadze

Abstract

The paper gives the definition of a continuous distribution for which every point of the domain is singular for the potential.

We consider both the 2-dimensional plane and the three-dimensionaal space, i.e. the logarithmic potentials and Newtonian potentials.