

## Решение прямой задачи гравиметрии для четырёхугольников

Т.А. Гванцеладзе, П.Ш. Миндели

Одним из основных направлений прикладной геофизики, и в частности гравиразведки, является разработка рациональных комплексов применительно к решению разнообразных геологических задач - от изучения глубинного строения земной коры и верхней мантии, тектонического районирования и картирования до непосредственных поысков и разведки месторождений полезных ископаемых.

Геологические объекты (разрывы, разломные нарушения, структуры с малой амплитудой, залежи полезных ископаемых и т. п.) изучаются (должны изучаться) комплексом геофизических методов, применяемых последовательно или одновременно. При этом, под комплексированием следует понимать не только выявление возможностей отдельных геофизических методов разведки (сейсморазведка, гравиразведка, магниторазведка, электроразведка и др.), но и, что очень важно, возможности отдельных геофизических полей для конкретного геофизического метода. Например, в гравиразведке к их числу следует отнести также элементы гравитационного поля как высшие производные потенциала силы тяжести и их разного вида комбинации. Одним из эффективных инструментов решения вопроса комплексирования отдельных элементов гравитационного поля и установления объективной их роли в комплексности следует считать методы моделирования.

Конкретные средства и разновидности моделирования (математическое, физическое и др.) настолько гибки и разнообразны, что допоскают детальное и достаточно глубокое раскрытие отдельных частных сторон моделируемого объекта.

В процессе развития теории и методологии комплексирования геофизических методов исследований при решении геологических задач было разработано понятие физико - геологической модели (ФГМ). ФГМ используют не только для формирования интерпретационных математических моделей, но и для количественного обоснования рациональных поисковых комплексов и методики комплексных геофизических исследований.

В самой общей постановке "Физико - геологическая модель объекта геофизического изучения - это система абстрактных возмущающих тел и вызываемых ими аномальных эффектов, которые аппроксимируют геологический объект и с необходимой для моделирования детальностью обобщенно отражают его структуру, размеры, форму, петрофизические свойства и соответствующее им объемное распределение физических полей". [2, стр.6].

Таким образом, поскольку целью математического моделирования, при геологическом истолковании геофизических полей, является построения геологически содержательных моделей среды, то ее центральной проблемой является оптимизация решения прямой задачи.

Касаясь проблемы гравитационного моделирования следует отметить, что к настоящему времени получены фундаментальные результаты по вопросам решения прямых задач и несмотря на то, что принципиальных проблем нет, все же остаются технические проблемы, сводящиеся к построению соответствующих алгоритмов и

программ. Методы вычисления гравитационного поля, разработанные для разных физико - геологических условий, разделены на методы численных квадратур и аппроксимационные методы. В зависимости от физико - геологических условий, интерпретатор предпочтению дает тому или иному методу. И все же в практике гравитационного моделирования наиболее широкое применение получил аппроксимационный метод, основанный на аппроксимации сложного распределения масс набором элементарных тел, которые можно описать аналитически. При этом, исходные выражения элементов поля записываются в явном виде с помощью двойных (плоская задача) или тройных (объемная задача) интегралов, пределы которых определяются геометрическими формами аппроксимируемых тел. Однако, пока не установлены критерии для выбора предпочтительной формы представления как самой среды элементарными телами, так и самых элементов поля с точки зрения алгоритмов и программ их вычисления. Проблема математического моделирования и алгоритмов решения прямых задач посвящена обширная литература как в виде отдельных статей, так и обзорных работ с критическим изложением соответствующего материала [1 - 8].

Из большого спектра элементарных тел аппроксимирующих двухмерную геологическую среду, на практике наиболее часто используют совокупность наклонных и вертикальных ступеней как при условии постоянства плотности, так и изменении плотности в различных направлениях по разному закону. Причем, часто предлагаются такие законы изменения плотности, которые редко фиксируются данными наблюдений. Исходя из этого, ниже дается алгоритм вычисления отдельных элементов гравитационного поля для двух видов четырехугольников: а - основание четырехугольника параллельны оси Ox; б - боковые стороны четырехугольника параллельны оси Oz [рис. 1,а,б].

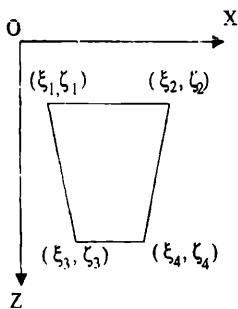


рис. 1, а

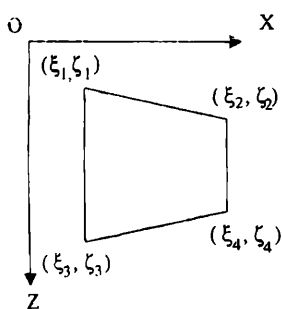


рис. 1, б

Интегральная форма представления поля силы тяжести двумерного распределения масс имеет вид:

$$V_z(x, z) = 2f\sigma \iint_S \frac{\zeta - z}{r^2} ds, \quad (1)$$

где S - площадь контура, ограничивающего распределения двумерных масс; x, z - координаты внешней, а  $\xi, \zeta$  внутренней точек двумерного пространства;  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}$  - расстояние между этими точками;  $ds = d\xi d\zeta$  - элемент площади в прямоугольной системе координат; f - гравитационная постоянная.

Ясно, что в зависимости от вида четырехугольника две стороны контура, ограничивающего S, будут фиксированы: для четырехугольников вида а фиксированы  $-\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , а для б-  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Следовательно, чтобы взять интеграл по внешнему контуру

следует знать закон изменения  $\xi$  от  $\zeta$  (для вида а) и закон изменения  $\zeta$  от  $\xi$  (для вида б). Исходя из уравнения прямой, проходящей через две заданные точки, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(\zeta) &= \xi_1 + k_1(\zeta - \zeta_1), \\ \xi_2(\zeta) &= \xi_2 + k_2(\zeta - \zeta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2,a)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(\xi) &= \zeta_1 + k_3(\xi - \xi_1), \\ \zeta_2(\xi) &= \zeta_2 + k_4(\xi - \xi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2,b)$$

В этих выражениях  $k_1, k_2, k_3, k_4$  - представляют угловые коэффициенты соответствующих сторон четырехугольников и равны:

$$k_1 = \frac{\xi_4 - \xi_1}{\zeta_4 - \zeta_1}, k_2 = \frac{\xi_3 - \xi_4}{\zeta_3 - \zeta_2}, k_3 = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\xi_2 - \xi_1}, k_4 = \frac{\zeta_4 - \zeta_3}{\xi_4 - \xi_3} \quad (3)$$

С учетом соотношений (2) и (3) для вычисления поля силы тяжести  $V_z$  от четырехугольников вида (а) следует взять интеграл:

$$V_z(x, z) = 2f\sigma \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{\xi_1(\zeta)}^{\xi_2(\zeta)} \frac{(\zeta - z)d\xi d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}, \quad (4,a)$$

$$V_z(x, z) = 2f\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\zeta_1(\xi)}^{\zeta_2(\xi)} \frac{(\zeta - z)d\xi d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \quad (4,b)$$

Интегрируя (4,a) и (4,b) по  $\zeta$  будем иметь:

$$V_z(x, z) = -2f\sigma \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ \arctg \frac{\xi_1(\zeta) - x}{\zeta - z} - \arctg \frac{\xi_2(\zeta) - x}{\zeta - z} \right] d\zeta, \quad (5,a)$$

$$V_z(x, z) = -2f\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[ \ln \left[ (\xi - x)^2 + (\zeta_1(\xi) - z)^2 \right] - \ln \left[ (\xi - x)^2 + (\zeta_2(\xi) - z)^2 \right] \right] d\xi.$$

(5,b) Последние выражения есть исходные интегральные представления отдельных элементов гравитационного поля, которые получаются путем дифференцирования (5,a) и (5,b) по соответствующим координатам  $x$  и  $z$ . В практических целях интегралы входящие в (5,a) и (5,b) вычисляются приближенными методами численных квадратур. Но часто, при математическом моделировании приходится рассчитывать эффекты, которые лежат в пределах точности вычисления методами численных квадратур.

В связи с этим, ниже выводятся точные аналитические формулы для таких элементов гравитационного поля, как  $-V_z, V_{zx}, V_{xz}, V_{zz}, V_{zzz}, V_{zzx}$ . С целью краткости изложения, в дальнейшем, многие промежуточные выкладки получения рабочих формул будут опущены.

В данной статье получены рабочие формулы элементов поля четырехугольника с основанием параллельными оси  $Ox$  (вид а).

Подставляя в формулу (5,a) вместо  $\xi_1(\zeta)$  и  $\xi_2(\zeta)$  их выражения из (2,a), она приводится к виду:

$$V_z(x, z) = -2f\sigma \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ \arctg \frac{p_1 + k_1\zeta}{\zeta - z} - \arctg \frac{p_2 + k_2\zeta}{\zeta - z} \right] d\zeta, \quad (6)$$

$$\text{где } p_1 = \xi_1 - x - k_1\zeta_1, \quad p_2 = \xi_2 - x - k_2\zeta_2 \quad (7)$$

Так как в выражении (6) оба интеграла одного типа, то вычисление приводятся только для первого интеграла. Применяя к первому интегралу частичное интегрирование, оно приводится к виду:

$$I_1 = \zeta \arctg \frac{p_1 + k_1\zeta}{\zeta - z} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} + (p_1 + k_1\zeta) \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta d\zeta}{(p_1 + k_1\zeta)^2 + (\zeta - z)^2} \quad (8)$$

Знаменатель подинтегрального выражения (8) приводится к квадратичному трехчлену относительно  $\zeta$  и будем иметь:

$$I_1 = \zeta \operatorname{arctg} \frac{p_1 + k_1 \zeta}{\zeta - z} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} + (p_1 + k_1 z) \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta d\zeta}{a_1 \zeta^2 + b_1 \zeta + c_1} \quad (9)$$

$$\text{здесь: } a_1 = k_1^2 + 1; b_1 = 2(p_1 k_1 - z); c_1 = p_1^2 + z^2. \quad (10)$$

Так как последний интеграл табличный, то окончательно будем иметь:

$$I_1 = \left[ \zeta \operatorname{arctg} \frac{p_1 + k_1 \zeta}{\zeta - z} + (p_1 + k_1 z) \left[ \frac{1}{2a_1} \ln |X_1| - \frac{b_1}{2a_1} \begin{cases} \frac{-1}{a_1(2a_1 \zeta + b_1)}, \Delta_1 = 0 \\ 2 \operatorname{arctg} \frac{2a_1 + b_1}{\sqrt{-\Delta_1}}, \Delta_1 < 0 \end{cases} \right] \right] \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (11)$$

здесь:  $X_1 = a_1 \zeta^2 + b_1 \zeta + c_1; \Delta_1 = b_1^2 - 4a_1 c_1 = -4(p_1 + k_1 z)^2, \Delta_1$  - дискриминант квадратичного трехчлена  $X_1$ .

Аналогичными выкладками для второго интеграла в (6) получаем:

$$I_2 = \left[ \zeta \operatorname{arctg} \frac{p_2 + k_2 \zeta}{\zeta - z} + (p_2 + k_2 z) \left[ \frac{1}{2a_2} \ln |X_2| - \frac{b_2}{2a_2} \begin{cases} \frac{-1}{a_2(2a_2 \zeta + b_2)}, \Delta_2 = 0 \\ 2 \operatorname{arctg} \frac{2a_2 + b_2}{\sqrt{-\Delta_2}}, \Delta_2 < 0 \end{cases} \right] \right] \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (12)$$

$$\text{здесь: } a_2 = k_2^2 + 1; b_2 = 2(p_2 k_2 - z); c_2 = p_2^2 + z^2. \quad (13)$$

$$X_2 = a_2 \zeta^2 + b_2 \zeta + c_2; \Delta_2 = -4(p_2 + k_2 z)^2. \quad (14)$$

С учетом (11) и (12), окончательно, поле силы тяжести четырехугольника с основаниями параллельными оси  $Ox$ , вычисляется по формуле:

$$V_z(x, z) = -2f\sigma [I_1 - I_2]. \quad (15)$$

Дифференцируя (5,a) по  $x$  и  $z$  и опуская довольно громоздкие выкладки, приводящие интегралы к табличному виду, нами получены интегральные представления отдельных элементов гравитационного поля для случая четырехугольников вида а:

$$V_{zx}(x, z) = 2f\sigma \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ \frac{\zeta - z}{X_1} + \frac{\zeta - z}{X_2} \right] d\zeta, \quad (16)$$

$$V_{zz}(x, z) = 2f\sigma \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ \frac{p_1 + k_1 z}{X_1} - \frac{p_2 + k_2 z}{X_2} \right] d\zeta \quad (17)$$

$$V_{zzz}(x, z) = -2f\sigma \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ \frac{X_1 - 2(p_1 + k_1 z)(p_1 + k_1 \zeta)}{X_1^2} - \frac{X_2 - 2(p_2 + k_2 z)(p_2 + k_2 \zeta)}{X_2^2} \right] d\zeta, \quad (18)$$

$$V_{zzz}(x, z) = 2f\sigma \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ \frac{k_1 X_1 + 2(p_1 + k_1 z)(\zeta - z)}{X_1^2} - \frac{k_2 X_2 + 2(p_2 + k_2 z)(\zeta - z)}{X_2^2} \right] d\zeta. \quad (19)$$

Приведенные здесь интегралы представляют собой табличные интегралы вида [8]:

$$\int \frac{(\alpha x + \beta)^n dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \quad (20)$$

Интегрируя (16) - (19) по  $\zeta$ , приводим окончательные аналитические формулы для указанных выше элементов гравитационного поля:

$$V_{xz}(x, z) = 2f\sigma \left[ \begin{array}{l} \ln|X_1| - \frac{2a_1 z + b_1}{2a_1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{a_1(2a_1\zeta + b_1)}, \Delta_1 = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{2a_1\zeta + b_1}{\sqrt{-\Delta_1}}, \Delta_1 < 0 \end{array} \right\} \\ \ln|X_2| - \frac{2a_2 z + b_2}{2a_2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{a_2(2a_2\zeta + b_2)}, \Delta_2 = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta_2}} \operatorname{arctg} \frac{2a_2\zeta + b_2}{\sqrt{-\Delta_2}}, \Delta_2 < 0 \end{array} \right\} \end{array} \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (21)$$

$$V_{zz}(x, z) = 2f\sigma \left[ \begin{array}{l} (p_1 + k_1 z) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{a_1(2a_1\zeta + b_1)}, \Delta_1 = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{2a_1\zeta + b_1}{\sqrt{-\Delta_1}}, \Delta_1 < 0 \end{array} \right\} \\ (p_2 + k_2 z) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{a_2(2a_2\zeta + b_2)}, \Delta_2 = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta_2}} \operatorname{arctg} \frac{2a_2\zeta + b_2}{\sqrt{-\Delta_2}}, \Delta_2 < 0 \end{array} \right\} \end{array} \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (22)$$

$$V_{zx}(x, z) = -2f\sigma \left[ \frac{\zeta - z}{X_1} - \frac{\zeta - z}{X_2} \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (23)$$

$$V_{zz}(x, z) = -2f\sigma \left[ \frac{p_1 + k_1\zeta}{X_1} + \frac{p_2 + k_2\zeta}{X_2} \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (24)$$

Как видно в (21) и (22) при втором слагаемом присутствуют два множителя соответствующие случаям, когда дискриминант  $\Delta \leq 0$ . Следует заметить, что  $\Delta < 0$  во всех случаях.

Для трансформантов  $V_z, V_x, V_{xz}, V_{zz}$  разработаны алгоритмы и на алгоритмическом языке Pascal составлены программы вычисления.

#### Литература

1. Страхов В.Н. Математическое моделирование в теории интерпретации гравитационных полей. В кн: Математическое и физическое моделирование железнорудных месторождений и рудных полей. - Новосибирск, изд. - во СНИИГТ и МС, 1983.
2. Вахромеев Г.С., Давыденко А.Ю. Моделирование в геофизической разведке. - М. Недра, 1987.
3. Булах Е.Г., Кричмар М.Н., Маркова М.Н., Старостенко В.И., Параданова В.М. Методическое руководство и сборник программ решения прямых задач гравиразведки на ЭВМ "Минск-22", вып.3, Наукова думка, 1971.
4. Зейгельман М.С. Методическое руководство и сборник программ для решения прямых задач магниторазведки, Вып.4, Наукова думка, 1972.

5. Балавадзе Б.К., Картвелишвили К.М., Миндели П.Ш., Гванцеладзе Т.А. - Методы и алгоритмы построения гравитационной модели литосферы. Изд. Наукова думка, Киев, 1989.
6. Голиздра Г.Я. Основные методы решения прямой задачи гравиразведки на ЭВМ, М., изд.-во ВНЭМС, 1977.
7. Пашко В.Ф., Старостенко В.И. Методы решения прямых и обратных задач магнитометрии на ЭВМ ( по материалам зарубежных публикаций. М. Изд. -во ВНЭМС, 1982.
8. Гольшмидт В.И. Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М., Недра, 1984.
9. Смолянский М. Л. - Таблицы неопределенных интегралов. Москва, 1961.

## გრავიმეტრიის პირდაპირი ამოცანის ამოხსნა ოთხკუთხედებისათვის

თ. გვანცელაძე, პ. მინდელი

რეზიუმე

სტატიაში ნაჩვენებია, რომ ფენოვანი აგებულების გეოლოგიური რეგიონი, საკმაოდ დიდი სიზუსტით, შეიძლება აპროქსიმირებულ იქნეს ტრაპეციების სისტემით.

მოყვანილია გრავიმეტრიის პირდაპირი ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი ორგანზომილებიანი ფენოვანი გარემოსათვის, რომელშიც მთაპროქსიმირებულ სხეულად გამოყენებულია ნებისმიერად ორიენტირებული ტრაპეციების სისტემა.

## Solution of gravimetry of direct problem of trapezoidal system

T. Gvantseladze, P. Mindeli

Abstract

It is shown that the stratum geological region of the crust can be approximated by help of trapezoidal system. It is done the solution of direct algorithm of two-dimensional structure environment, in which the trapezoidal system is used as approximating one.