Доклады Академии наук СССР
1981. Том 257, № 2

УДК 550.831

ГЕОФИЗИКА

М.А. АЛЕКСИДЗЕ, Н.Л. ЛЕКИШВИЛИ, М.М. НИКОЛАИШВИЛИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ БЛИЗЛЕЖАЩИХ ЗОН

(Представлено академиком М.А. Садовским 19 XI 1980)

Определение плотностей самых верхних слоев Земли представляет значительный интерес как для поиска полезных ископаемых, так и для создания гравитационной модели коры и верхней мантии большого региона. Гравиметрический метод их определения основан на разделении полей и соответствующие расчетные формулы получаются из следующих соображений.

Рассмотрим одномерный случай. Пусть в трех точках $M_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3$, лежащих на одной прямой O_x, заданы измеренные значения поля g_i и вычисленные с единичной плотностью поля $u(x_i)$ той близлежащей зоны G, для которой следует определить избыточную плотность $\bar{\sigma}$. Обозначим через V_i разность $g_i - \sigma u_i$ и будем называть ее региональной составляющей поля, в отличие от локальной составляющей σu_i. Разложением по формуле Тейлора легко получается выражение для плотности

$$\bar{\sigma} = \frac{g_2 + \eta g_3 - (1+\eta)g_1}{u_2 + \eta u_3 - (1+\eta)u_1} + \frac{(x_2 - x_1)V''_{xx}(\theta) - (x_3 - x_1)V''_{xx}(\Omega)}{2u_2 + 2\eta u_3 - 2(1+\eta)u_1}, \tag{1}$$

где $\eta = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$, для точек θ и Ω справедливы неравенства $x_2 \leqslant \theta \leqslant x_1$, $x_1 \leqslant \Omega \leqslant x_3$. На практике формулой (1) пользуются, отбрасывая остаточный член – второе слагаемое в ее правой части. Для малости этого члена расстояния между точками M_i должны быть, с одной стороны, достаточно большими по отношению к размерам исследуемой области G, чтобы локальная составляющая в этих точках не аппроксимировалась бы линейной функцией (и тогда знаменатель в формуле (1) будет отличным от нуля), а с другой – достаточно малыми, чтобы региональная составляющая в этих точках хорошо аппроксимировалась линейной функцией, что обеспечит малость остаточного члена формулы (1). Эти условия всегда можно более или менее хорошо удовлетворить, но встает вопрос: по отношению к какой "фоновой" плотности $\tilde{\sigma}$ считать плотность $\bar{\sigma}$, определяемую по формуле (1), избыточной. Если вне исследуемой области G плотность является постоянной (σ_0) и рельеф вне области G также спокоен, то очевидно, что фоновая плотность $\tilde{\sigma}$ совпадает с плотностью окружающей среды σ_0. Действительно, рассмотрим следующий идеализированный пример. Пусть дневная поверхность является плоскостью, под которой плотность постоянна (σ_0), за исключением исследуемой области G, которая имеет плотность $\sigma_1 \neq \sigma_0$. Взяв для области G в качестве фонового значения плотности σ_0, для региональной составляющей поля получаем постоянное значение и, следовательно, остаточный член формулы (1) будет равен нулю и формула даст абсолютно точное значение для избыточной плотности $\sigma_1 - \sigma_0$.

Нетрудно получить формулы для определения избыточной плотности для плоского случая (когда четыре точки $M_i(x_i y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, лежат на произвольной плоскости)

$$\bar{\sigma} = B(g)/B(u) \tag{2}$$

и для пространственного случая (когда в пяти точках $M_i(x_i y_i z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, имеются измеренные значения поля)

(3) $\quad \bar{\sigma} = A(g)/A(u)$,

где операторы A и B определяются для любой функции ψ следующими формулами:

$$B(\psi) = (x_{41}y_{31} - x_{31}y_{41})\psi_2 - (x_{41}y_{21} - x_{21}y_{41})\psi_3 + (x_{31}y_{21} - x_{21}y_{31})\psi_4 - $$
$$- (x_{34}y_{21} - y_{41}x_{32} + x_{42}y_{31})\psi_1,$$

$$A(\psi) = [(x_{31}z_{21} - x_{21}z_{31})(x_{51}y_{21} - x_{21}y_{51}) -$$
$$- (x_{51}z_{21} - x_{21}z_{51})(x_{31}y_{21} - x_{21}y_{31})] \times$$
$$\times \{(x_{41}y_{21} - x_{21}y_{41})(x_{31}\psi_2 - x_{21}\psi_3) - (x_{31}y_{21} - x_{21}y_{31})(x_{41}\psi_2 - x_{21}\psi_4) -$$
$$- [x_{32}(x_{41}y_{21} - x_{21}y_{41}) - x_{42}(x_{31}y_{21} - x_{21}y_{31})]\psi_1\} -$$
$$- [(x_{31}z_{21} - x_{21}z_{31})(x_{41}y_{21} - x_{21}y_{41}) - (x_{41}z_{21} - x_{21}z_{41})(x_{31}y_{21} -$$
$$- x_{21}y_{31})]\{(x_{51}y_{21} - x_{21}y_{51})(x_{31}\psi_2 - x_{21}\psi_3) - (x_{31}y_{21} -$$
$$- x_{21}y_{31})(x_{51}\psi_2 - x_{21}\psi_5) - [x_{32}(x_{51}y_{21} - x_{21}y_{51}) -$$
$$- x_{52}(x_{31}y_{21} - x_{21}y_{31})]\psi_1\},$$

координата с двумя индексами обозначает разность этих координат у соответствующих точек (например, $y_{41} = y_4 - y_1$).

Для определения истинной плотности σ на основе избыточной плотности $\bar{\sigma}$, полученной с помощью формул (1)–(3), покроем поверхность S исследуемого региона равномерной сеткой с шагом h, в узлах $(x_i y_j)$ которой заданы значения избыточной плотности $\bar{\sigma}_{ij}$. Рассмотрим вокруг каждого узла восемь ближайших соседних узлов и представим в окрестности этой десятки узлов инстинную плотность $\sigma(x, y)$ в виде полинома второго порядка от двух независимых переменных

(4) $$\sigma_{ij}(x, y) = a_{0ij} + a_{1ij}(x - x_i) + a_{2ij}(y - y_j) + a_{3ij}(x - x_i)^2 +$$
$$+ a_{4ij}(x - x_i)(y - y_j) + a_{5ij}(y - y_j)^2.$$

Будем отождествлять избыточную плотность, определенную по формулам (1)–(3), со следующим выражением:

(5) $$\bar{\sigma}(x, y) = \sigma(x, y) - \frac{1}{9h^2} \int\limits_{x-\frac{3}{2}h}^{x+\frac{3}{2}h} \int\limits_{y-\frac{3}{2}h}^{y+\frac{3}{2}h} \sigma(\xi, \eta) d\xi, d\eta.$$

В оправдание такого представления можно сказать, что, во-первых, формула (5) определяет избыток любой функции $\sigma(x, y)$ (не только плотности) над его средним значением, а во-вторых, для функции $\bar{\sigma}(x, y)$, определенной из (5), так же, как для избыточной плотности, получаемой из формул (1)–(3), не играют роли значения постоянной и линейных членов в формуле (4). Действительно, подставляя (4) в (5), получаем

(6) $\quad \bar{\sigma}(x_i, y_j) = \bar{\sigma}_{i,j} = -\tfrac{1}{2} h^2 (a_{3ij} + a_{5ij}).$

Таким образом, избыточная плотность равна нулю для гармонической части изменения плотности по формуле (4) (т.е. для любых значений коэффициентов a_{0i}, a_{1ij}, a_{2ij}, a_{4ij}) и воспринимает лишь "надгармоническое" изменение плотности. Этого и следовало ожидать, ибо одним из возможных определений гармонической функции является ([1]) то, что U должна в любой точке равняться среднему значению на окружности любого радиуса с центром в этой точке.

Применим к обеим частям формулы (4) оператор Лапласа $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$:

$$(7) \qquad \Delta \sigma_{ij}(x, y) = 2(a_{3ij} + a_{5ij})$$

или, учитывая формулу (6) и записывая равенство (7) для узловых точек, получаем

$$(8) \qquad \Delta \sigma_{ij}(x_i y_j) = -\frac{4}{h^2}\bar{\sigma}_{ij}.$$

Для интегрирования уравнения Пуассона (7) и определения истинной плотности σ на основе избыточной плотности $\bar{\sigma}$ на границе s исследуемой области следует задавать граничные условия. В качестве последних можно воспользоваться условиями Дирихле

$$(9) \qquad \sigma|_{s_1} = \psi(s),$$

если истинная плотность для тех глубин, для которых определены избыточные плотности, на части s_1 границы s известны. Так, например, если избыточные плотности определяются для объема выше некоторого уровня (в частном случае, уровня моря), а на части s_1 дневная поверхность Земли совпадает с этим уровнем, то ясно, что $\sigma|_{s_1} = 0$. В тех случаях, когда для части s_2 известно изменение истинной плотности вдоль нормали s_2, можно применить граничное условие Неймана

$$(10) \qquad \left.\frac{\partial \sigma}{\partial n}\right|_{s_2} = \varphi(s).$$

Так, например, если для s_2 не известно σ, но из геолого-геофизических соображений ожидаем, что вдоль нормали s_2 истинная плотность уже не меняется, то в этом случае

$$\left.\frac{\partial \sigma}{\partial n}\right|_{s_2} = 0.$$

Окончательно для определения истинной плотности σ на основе избыточной плотности следует решить граничную задачу (8)–(10), численные и приближенные решения которой разработаны достаточно хорошо ([2]).

Институт геофизики Академии наук ГрузССР,
Тбилиси

Поступило
15 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов*, Основные дифференциальные уравнения математической физики, М., Физматгиз, 1962. [2] *В. Вазов, Дж. Форсайт*, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1963.