

Гидродинамическая модель конусообразной подземной лавовой трубки

Кереселидзе З.А., Одилавадзе Д.Т.

Институт геофизики им. М. З. Нодиа Тбилисского государственного университета, ул.
Алексидзе No. 1, 0160, Тбилиси, Грузия
z_kereselidze@yahoo.com

Введение. Движение лавовых извержений из вулканических жерл достаточно точно можно моделировать уравнениями одножидкостной гидродинамики для вязкой среды [1]. Физическая аналогия между течением лавы и течением вязкой несжимаемой среды, например воды, является очевидной. В известной мере граничные условия для лавового потока идентичны условию прилипания воды к твёрдой поверхности. Лавовую трубку можно уподобить, например руслу подземной реки, либо какому-нибудь гидротехническому сооружению, имеющему предназначение водовода. Поэтому, для моделирования динамической картины движения лавы по трубке любой формы можно применять уравнение Навье-Стокса. Например, аппроксимация открытым каналом прямоугольного, либо трапециодального сечения в полной мере соответствует лавовым руслам, когда лава течёт либо на склонах вулканов, либо по земной поверхности. Однако, существуют также и подземные течения лавы, когда она заполняет существующие в земле пустоты и трещины, или же, подобно подземным рекам, сама при движении формирует закрытую подземную трубку (Фото-1). В таком случае особенно удобно лавовую трубку аппроксимировать прямолинейной, либо криволинейной трубой круглого сечения с гладкой или шероховатой внутренней поверхностью.

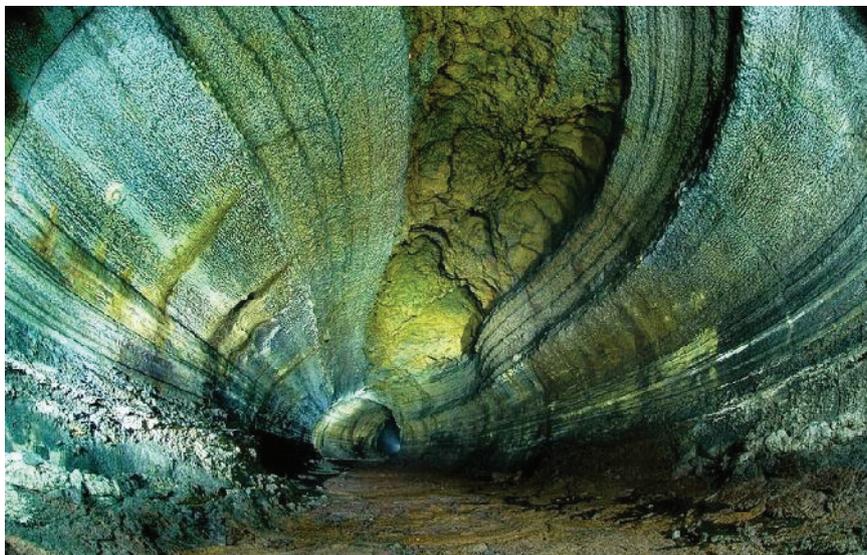


Фото.1

О структуре и механизме генезиса повсеместно встречающихся, подробно исследованных, гrotов и пещер вулканического происхождения, известно достаточно давно. Однако, в течение последних десятилетий были обнаружены специфические подземные лавоводы, которые структурно весьма

отличаются от обычных вулканических пещер. Главная особенность этих структур, исследование которых приняла интенсивный характер, заключается в том, что они обычно находятся на небольшой глубине (20 м) и имеют настолько маленький наклон, что их можно считать квазипараллельными земной поверхности (10—100 м) Фото-2, Фото-3. Очевидно, что такие лавоводные структуры не могут считаться случайными хотя бы из-за их большого количества и некоторого однообразия формы. Действительно, сразу же представляется очевидным сходство подземных лавоводов с руслом подземной реки. Если тут и есть какие-либо вопросы, то они возникают, в первую очередь, относительно подобия процесса генезиса лавовых и водяных трубок, который заключается в механических и термодинамических аспектах создания подземных пустот. Кроме этого, следует принять во внимание различие во временных масштабах действия воды, прокладывающей русло, и лавы, которая должна течь в течение относительно более коротких отрезков времени. Однако, если отбросить указанный момент сомнения, результирующие эффекты, производимые действиями воды и лавы и приводящие к самосозданию подземной трубки, фактически идентичны. Основным фактором, обеспечивающим такое подобие, является вязкость жидкой среды, играющая главную роль в поверхностных явлениях, т.к. от нее зависит сцепление текущей субстанции со стенками трубки. Однако, эта термодинамическая характеристика для воды и для лавы величина существенно разная. Для воды коэффициент кинематической вязкости: $\mu_0 \approx 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, в то время, как в момент извержения вблизи жерла вулкана характерная величина коэффициента кинематической вязкости для лавы приблизительно равна $\mu \approx 5 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Это означает, что при одинаковых гидродинамических параметрах водяной и лавовой трубок разница в величинах характерного числа Рейнольдса будет в нескольких порядках. Отсюда, в частности, следует что течение лавы, в отличие от течения воды, в трубке любого типа практически всегда будет ламинарным. Действительно, для воды, текущей в круглой трубе, турбулентность может возникнуть, когда число Рейнольдса достигнет: $Re = 10^3$, что для лавы является очень большой величиной. Однако, это не означает, что возникновение вихревых движений в лавовом потоке из-за малости числа Рейнольдса исключается. Можно лишь предполагать, что если и возможна полная турбулизация лавы, то в этом случае характерное число Рейнольдса должно быть того же порядка, что и для воды. Для этого скорость лавы должна быть чрезвычайно высокой, а диаметр лавовой трубки — очень большим. Фото-3 Однако известно, что максимальная скорость, которую может достичь лавовый поток $V \approx 60 \text{ км ч}^{-1}$ при характерном радиусе R (гидравлический радиус) лавового русла 10-30 м. Следовательно, характерное число Рейнольдса для очень быстрого лавового потока $Re = 2RV / \mu \approx 70-200$. Поэтому, турбулизация лавы, подобно воде при идентичных параметрах течения, является мало вероятной.

Гидродинамическая модель конусообразной подземной лавовой трубки. Для построения данной модели используется аппроксимация тела, подобного обычной хозяйственной воронке, конусом, имеющим малый угол раствора. Предполагается, что сечение конусообразной трубки может быть и полукруговым, т.е. оно может иметь как круглую, так и аркоподобную форму (Фото-2). В такой трубке лава должна двигаться за счет потенциальной энергии, возникающей из-за перепада высот между резервуаром лавы и трубкой, либо вследствие изменения статического давления из-за постепенного суживания трубки (Фото-3).



Фото .2



Фото .3

Для простоты остановимся на втором варианте и будем считать, что резервуар непосредственно соединяется с лавовой трубкой. Если, как это принято в гидравлике, лавовое русло отождествить с интегральной трубкой тока, можно считать, что течение лавы будет подчиняться уравнению Бернулли. Малость угла раствора конусообразной трубки означает, что она имеет достаточную длину по сравнению с диаметром ее сечения, что вполне соответствует большинству подземным лавовым трубкам. В то же время, конусообразность модельной трубки означает об ее подобии обычной воронке, сквозь которой течёт жидкость. При таком представлении некоторое расхождение с воронкой может возникнуть лишь в связи с допущением о малости угла раствора. Действительно, в вертикально расположенных хозяйственных воронках градиент давления и угол раствора довольно большие. Поэтому сильное завихрение жидкости возникает моментально по всей поверхности воронки. В отличие от воронки, модельная трубка предполагается практически горизонтальной. Поэтому, она должна быть менее эффективной для завихрения лавы. Однако, и в этом случае существуют гидродинамические условия, с большой вероятностью способствующие локальному возникновению и последующему усилению завихренности в определенном месте лавовой трубки.

Представим, что подземная прямолинейная конусообразная трубка, отождествленная с гидродинамической трубкой, непосредственно соединена с резервуаром неподвижной лавы, находящемся на уровне основания русла. Без ограничения общности можно допустить, что высота резервуара равна диаметру модельной трубки. Несмотря на то, что такая трубка может иметь достаточно большую характерную площадь сечения, если ее длина многократно превосходит радиус, то в любом сечении трубы будет справедливым уравнение Бернулли

$$\frac{1}{2} (V_z^2 + V_\varphi^2 + V_r^2) + \frac{P}{\rho} = \frac{\bar{P}}{\rho}, \quad (1)$$

где $-V_r, V_\varphi, V_z$, компоненты скорости лавы в цилиндрических координатах, ось Z направлена от основания трубки, \bar{P} - гидростатическое давление в резервуаре, т.е. на входе трубки, P - гидростатическое давление в некотором сечении трубы, ρ - плотность лавы.

Лавы считается несжимаемой средой, которая подчиняется упрощенному уравнению неразрывности

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Допустим,, что на входе трубки, а также на некотором отрезке ее длины, течение лавы является полностью ламинарным. т.е. имеет радиально- параллельную слоистую структуру. Далее, по мере роста расстояния от входа в трубку, ламинарное течение, из-за эффекта воронки, постепенно разрушается и происходит скручивание потока. Из-за большой вязкости лавы этот эффект вряд ли приводит к значительному завихрению потока, который, несмотря на закручивание, тем не менее, может сохранять слоистую структуру. Скручивание потока лавы будет происходить не только из-за суживания трубки, но, в не меньшей степени, также из-за возрастания толщины вязкого пограничного слоя на внутренней поверхности лавовой трубки. Очевидно, что в результате этого

явления должно постепенно уменьшаться эффективное поперечное сечение трубки. Поэтому, в предложенной модели акцентирована особенная роль вязкого пограничного слоя, существование которого предполагает наличие твёрдой внутренней поверхности трубки, к которой прилипает лава (рис.1). В гидродинамической теории для определения параметров вязкого пограничного слоя чаще всего принято пользоваться методом Польгаузена [2.3]. Однако, для модели конусообразной прямолинейной лавовой трубки более подходящим представляется воспользоваться аналогией с вязким пограничным слоем на внутренней поверхности обычной хозяйственной воронки. Существует теория, определяющая гидродинамические параметры движения обычной жидкости по такой воронке[4]. В частности, для определения толщины пограничного слоя в конусообразной воронке известна аналитическая формула

$$\delta_r \approx 1.5(M^3 - M^{16})^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\mu \cdot l^3 \cdot (\sin \alpha)^2}{R_0^2 \cdot \left(\frac{2P}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

где δ_r ,толщина вязкого пограничного слоя на внутренней поверхности конусообразной воронки, l_0 -расстояние от вершины конуса до сечения радиуса R_0 , $l=L-l_0$ (L -длина лавовой трубки), μ -кинематическая вязкость текущей через воронку жидкости, α - половина угла раствора конуса (рис.1). $M = \frac{l_0}{L} \leq 1$ - безразмерный параметр.

Кинематическая модель скоростей. Известно, что точное решение задачи движения вязкой жидкости в цилиндрическом приближении, при произвольных граничных условиях, в общем виде является аналитически неразрешимой задачей. Поэтому, из-за возникновения математических проблем, связанных с решением уравнения Навье-Стокса, приходится прибегать к упрощающим допущениям. Для этого, например, можно допустить некоторую симметрию в течении, или предположить, что движение является аксиально-переносным, т.е. радиальное течение внутри цилиндрической трубы отсутствует. Можно также считать, что нет расхода жидкости, т.е. движение среды в трубе является радиально- вращательным. Однако, существует способ, во многих задачах позволяющий избежать во многом столь искусственные ограничения, занижающие ценность упрощенных точных решений. Известно, что во многих задачах динамической метеорологии и гидравлики, в определенных условиях, для полноценного качественного и количественного анализов физических явлений достаточно воспользоваться т.н.кинематическим приближением. Суть этого метода заключается в задании априори поля скоростей при помощи какой-либо аналитической модели, удовлетворяющей определенным требованиям. Главным обязательным условием, которому должно подчиняться такое поле скоростей, заключается в удовлетворении уравнения неразрывности, как минимум, в относительно простом, несжимаемом приближении. Однако, существует проблема, заключающаяся в возможности практической реализации той или иной кинематической модели, поэтому вышеуказанное условие, хоть и обязательно, но является недостаточным. Необходимо, чтобы кинематическая модель скоростей удовлетворяла также условию динамической возможности движения. Такое требование является необходимым не только для идеальной, но и для вязкой жидкости. Подобные модели широко эксплуатировались для решения разнообразных задач гидродинамики, динамической метеорологии и динамики околоземного космического пространства [5,6,7]. Безусловно, что ограничения, накладываемые условиями динамической возможности суживают класс тех течений, которые могут быть смоделированы в кинематическом приближении., Однако, вместе с этим, они повышают ценность тех кинематических моделей, которые адекватны движениям, реализуемым в конкретных условиях. Например, для подтверждения физической состоятельности предлагаемой в данной работе кинематической модели, полезной представляется задача моделирования вынужденного конвективного движения, возникшего в горизонтальном

бесконечном жидком цилиндре. Такое движение, происходящее из-за возмущения покоящейся жидкости, обеспечивается наличием вертикального температурного градиента в цилиндре. Этот механизм возникает из-за неоднородности распределения температуры в контактирующей с жидким телом твердой среде. Т.к. самосогласованное решение указанной математической задачи является невозможным, температурное поле было определено из упрощенного стационарного уравнения теплопроводности при помощи достаточно сложной кинематической модели скоростей. В частности, компоненты скорости вынужденного конвективного движения несжимаемой жидкости были представлены через полиномы определенных степеней по декартовым координатам [8]. Одновременно, было выполнено условие периодичности движения вдоль оси симметрии бесконечного цилиндра, а также условие прилипания жидкости к его внутренней поверхности. В результате, из уравнения (2) неразрывности несжимаемой среды были определены одиннадцать независимых наборов компонент скоростей, в сумме составляющих полный пространственный базис, определяющий различные варианты топологической картины, представляющей развитие процесса конвективной неустойчивости. Согласно данному аналитическому представлению, движение жидкости на различных этапах неустойчивости, наряду с периодическими, содержало также и аperiodические типы движений. Например, топологическая картина развития процесса конвективного переноса составляла плоские круговые движения, развитием которых очевидно было появление пары разнонаправленных вихрей (Фото-4. Фото-5), которые далее могли преобразоваться в четверку и т.д. Несмотря на различие этой задачи от задачи конвективного переноса жидкости, именно данное обстоятельство представляется особенно полезным с точки зрения физической правдоподобности кинематической модели, с точки зрения адекватности движения лавы по лавоводной трубке. Хотя конвективное движение имеет малое сходство с гидродинамическим течением в цилиндрической трубке, тем не менее представляется, что существует обстоятельство, способствующее их топологическому сходству. Вероятней всего такое сходство обеспечивается наличием в обеих задачах вынуждающего механизма, закручивающего движущуюся жидкую среду. В первой задаче это обеспечивается неоднородностью температурного поля, во второй - эффектом конусообразности лавовой трубки, который вероятно усиливается шероховатостью внутренней поверхности трубки. В силу обязательного действия таких механизмов, для наглядного представления эффекта завихрения лавы, движущейся по конусообразному подземному руслу, можно считать, что сердцевина лавы, изолированная от поверхности русла вязким пограничным слоем, на определенном расстоянии от основания русла движется как поток идеальной жидкости. Радиус этой области: $\tilde{R} = R_0 - \delta_r$, где R_0 - радиус некоторого сечения конусообразной лавовой трубки. Очевидно, что при δ_r , т.е. на границе раздела вязкой и идеальной областей, должно выполняться условие сшивания скоростей, а на внутренней поверхности лавовой трубки должно удовлетворяться условие прилипания лавы. Однако, для физического анализа, не требующего особой математической строгости, можно поступить иным образом. Например, можно воспользоваться какой-либо кинематической моделью скоростей, в которой использована т.н. подстановка Кармана [2,3]. Подобная модель применялась, например, для моделирования температурного поля неоднородного вращения ионосферной плазмы в полярном каспе [9]. Применительно к нашей задаче удобной представляется трансформация указанной модели, которая в неявном виде учитывает фактор вязкости, т.к. удовлетворяется условие прилипания лавы к внутренней поверхности подземного лавового русла.

Таким образом, воспользуемся полярной системой координат и рассмотрим плоскую кинематическую модель скоростей, соответствующую неравномерному вращательному движению лавы в поперечном сечении модельной трубки

$$V_\varphi = \bar{U} \frac{R_0 - r}{R_0} (\cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$V_r = \frac{\bar{U}}{2} \frac{R_0 - r}{R_0} (\cos \varphi + \sin \varphi), \quad (4)$$

где $0 \leq r \leq R_0$, угловая координата φ может меняться с периодом $2\pi n$, где n – целое число. \bar{U} – характерная средняя скорость течения лавы, которая ниже будет определяться при помощи особого выражения.

Выражения (4) удовлетворяют плоское уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (5)$$

Как было указано, ценность кинематической модели скоростей повышается, если она, кроме уравнения (5), удовлетворяет еще одному условию динамической возможности движения. Это условие должно связать два уравнения, вытекающие из плоского уравнения Навье-Стокса

$$V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right], \quad (6)$$

$$V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right]. \quad (7)$$

Выполнение дополнительного условия динамической возможности движения зависит от параметра: $\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} P$, который должен быть определен по отдельности из уравнений (6) и (7) при помощи

кинематической модели (4). Равенство этих величин будет означать, что тестируемая модель является точным частным аналитическим решением уравнения движения. Такая ситуация возможна лишь в редких случаях, соответствующих определенным физическим условиям. Например, как было отмечено, кинематическая модель (4) оказалась точным аналитическим решением плоского уравнения движения, соответствующего задаче дифференциального вращения полярной ионосферы, где действует эффект Корриолиса [9]. К сожалению, данная модель в нашем случае не обладает таким качеством, что вероятно вызвано ее несовершенством. В частности, тем, что она, кроме эффекта вязкости среды, в явном виде не воспринимает также эффект продольного движения.

Однако факт несовершенства кинематической модели (4) вряд ли является принципиально существенным с точки зрения качественного восприятия результата кручения потока лавы. Действительно, суть используемого нами представления гидродинамического поля скоростей заключается в наглядности физической причины неоднородного вращения лавового потока, следы которого вероятно отображаются на внутренних поверхностях многих подземных лавовых трубок. При этом формулы (4) допускают не только неоднородность вращения, т.е. изменение величины угловой скорости в зависимости от угла φ , но и изменение направления азимутальной скорости V_φ . Этот эффект, очевидно, должен отображать рождение вихрей, возникающих вследствие возмущения вращательного движения, например, из-за шероховатости поверхности, что порождает возвратные течения. Поэтому, первоначальная ламинарная топология движения в продольном направлении постепенно изменится на вращательное в поперечном сечении модельной лавовой трубки. При этом, по всей видимости, первоначально кручение потока будет проявляться в возникновении двух ассиметричных вихрей разного направления Фото-4. Фото-5, которые впоследствии могут многократно дробиться. Такое движение в поперечном сечении лавовой трубки, в некоторой степени, можно считать похожим абстрактному движению идеальной жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами, одновременно меняющими направление вращения [10]. Однако, из-за эффекта вязкости, проявляющемуся в пограничном слое, полностью занимающюго второй цилиндр, синхронность вращения все более должна нарушаться по мере приближения к нижней границе пограничного слоя. В конце концов, вращательное движение, вследствие диссипации, должно полностью прекратиться. Если принять во внимание этот абстрактный результат и вернуться к лавовой трубке, вполне можно допустить эффект замедления вращения со временем. В результате этого процесс застывания лавы, прилипшей к внутренней поверхности русла, может отображаться в круговой шероховатости.

Таким образом, согласно модели (4), внутри вязкого пограничного слоя движение, подобно движению в сердцевине потока лавы, также будет вихревым. Из формулы (3) очевидно, что на некотором удалении от основания модельной конусообразной трубквязкий пограничный слой полностью займет ее поперечное сечение. Несмотря на то, что кинематическая модель скоростей (4) соответствует плоскому развитому вращательному движению жидкости, тем не менее она не противоречит возможности постепенной трансформации первоначального ламинарного радиально-слоистого движения в вихревое, по мере удаления от основания лавовой трубки. Показательным параметром такой трансформации является изменение величины характерной гидродинамической скорости, которая в основании трубки, согласно уравнению Бернулли (1), зависит от уровня лавы в резервуаре. Т.к. модель (4) подчиняется плоскому уравнению неразрывности, формально следует, что продольная скорость течения лавы может быть произвольной величиной, в том числе, не зависящей от координаты Z . По этой причине, такая упрощенная модель, несмотря на ее физическую наглядность, не может считаться математически достаточно строгой. Действительно, очевидно, что в суживающемся конусообразном русле средняя скорость течения лавы должна зависеть от радиуса ее сечения. Однако, формально, данное ограничение можно избежать, если считать, что средняя скорость течения лавы параметрически зависит от длины и угла раствора модельной лавовой трубки: $\bar{U}(L, \alpha)$. В таком случае для определения этого ключевого гидродинамического параметра, входящего в модель (4), можно воспользоваться выражением для средней гидродинамической скорости течения в круглой трубе [2]

$$\bar{U} = \sqrt{\frac{4R_0 \Delta P}{\lambda L \rho}}, \quad (8)$$

которая обычно используется в модифицированной формуле Хагена-Пуазейля для оценки величины расхода вязкой жидкости

$$Q = \pi R_0^2 \bar{U}. \quad (9)$$

Представляется, что формула (8), кроме модели (4), также может быть использована для оценки расхода лавы как в открытом русле, так и в лавоводной трубке. В эту формулу, наряду с другими параметрами течения, входит коэффициент гидродинамического сопротивления λ . Эту характеристику лавового потока вполне можно определить по аналогии с коэффициентом гидродинамического сопротивления воды, текущей в круглой трубке. Следовательно, хотя аппроксимация лавовой трубки гидродинамической трубкой является абстрактным приемом, она, тем не менее, может оказаться достаточно удобной с точки зрения простоты детерминирования гидродинамического эффекта завихрения потока лавы, очевидно возникающего внутри большинства лавоводных трубок.

Легко проверить, что кинематическая модель (4) не удовлетворяет условию

$$\vec{\nabla} \text{rot} \vec{v} = 0, \quad (10)$$

выполнение которого означало бы существование нормального сечения лавовой трубки в условиях движения, определяемого конкретным полем скоростей. Однако, как показатель эффективности этой модели, более важной является компонента вихря скорости по контуру границы поперечного сечения лавовой трубки. Отличная от нуля величина этого параметра означает наличие расхода лавы независимо от формы поперечного сечения трубки. Однако, это заключение не может быть однозначным в том случае, если в лаве возникают отдельные вихревые трубки меньшего, чем основная трубка, поперечного масштаба. В этом плане кинематическая модель (4) допускает не только уменьшение расхода лавы с возрастанием расстояния, но даже его прекращение, т.е. полное запираание лавовой трубки. Очевидно, что для реализации такой ситуации нужны особые условия. В

частности, развитию этого эффекта, в большой степени, может способствовать увеличение толщины вязкого пограничного слоя. Возникает естественный вопрос:какова топологическая структура вихревого движения,определенного кинематической моделью (4)? Ответ на этот вопрос заключается в величинециркуляции скорости, которая по этой модели вдоль контура поперечного сечения конусообразной трубки равна нулю. Однако, только это условие, являющееся свойством модели (4), не определяет однозначно топологические качестваплощади поперечного сечения модельной лавовой трубки. В общем случае, т.е. при наличии отдельных вихревых трубок, проходящих сквозь сечение главной трубки, площадь сечения будет многосвязанной областью, т.к. будет содержать, как минимум, два вихря разного направления (рис.2). Как было отмечено выше, из-за неустойчивости движения лавы, эти вихри могут подвергаться дальнейшему дроблению [10-12]. В процессе генерации продольных вихревых трубокпо контуру их поперечного сеченияциркуляции (интенсивности)будут отличны от нуля. Однако, алгебраическая сумма этих циркуляцийдолжна быть равной нулевой циркуляции по основномуконтур, охватывающему полное сечение модельной трубки.При этом,отсутствие нормального сечения для модели (4), не является ограничительным обстоятельством,т.е. форма контура площади сечения модельной трубки может быть произвольной. Кроме этого, в случае многосвязанной области также не исключается существование расхода лавы сквозь площади сечения, остающейся между отдельными вихревыми трубками. Поэтому, можно заключить, что в некотором поперечном сечении лавовой трубкивозможно возникновение сложного движения, которое является суперпозицией продольного течения вконусообразном русле и поперечного вращательного движения в плоскости сечения, а также более мелкомасштабного движения лавы по продольным вихревымтрубкам. Такое представление предполагает возникновение топологического неравновесия, без которого образование и дробление вихревых трубок является невозможным. Эти выводыдолжны быть справедливы и для модельной трубки сечения любой формы.



Фото 4.



Фото 5.

Таким образом, процесс движения лавы в модельной трубке можно качественно представить по следующей схеме: основание лавовой трубки непосредственно связано с резервуаром лавы с произвольным уровнем. Например,в случае достаточной нагрузки, само основание трубки может считаться высотой лавового резервуара. Даже в случае отсутствия наклона русларезервуар может иметь достаточное гидростатическое давление, присутствующее в правой части уравнения (1). Поэтому, в процессе моделирования движения лавы, в случае малого наклона, изменением гидростатического давления в конусообразной трубке можно пренебречь. На начальном участке трубки лава может двигаться подобно ламинарному потоку идеальнойжидкости с характерной скоростью, величина которой близка к скорости, определяемой гидростатическим давлением на входе модельной трубки. При дальнейшем течении возможно постепенное закручивание потока лавы, которое должно достигнуть своего максимума на некотором удалении от основания лавовой трубки. Этому месту на рис.1 соответствует поперечное сечение радиуса R_0 . Можно допустить, что именно этому сечению более всегосоответствует кинематическая модель (4). Однако, следует также

учесть действие фактора вязкого пограничного слоя, способного уменьшать площадь той части сечения, в которой лава движется подобно идеальной жидкости. В результате может возникнуть такая ситуация, при которой расход лавы практически будет равен нулю. При этом, расход лавы по отдельным вихревым трубкам, находящимся внутри основной модельной трубки, будет отличен от нуля. Такое представление физически можно оправдать лишь генерацией продольных вихрей лавы. Отсюда следует, что обсуждаемая модель допускает существование вдоль лавового русла достаточно крупных вихрей, возникающих в результате трансформации первоначального строго ламинарного движения во вращательное. Возникает вопрос, связанный с причиной, вызывающей постепенное закручивание лавового потока. Отметим, что такой возможной причиной, наряду с эффектом воронки, может также являться шероховатость внутренней поверхности лавовой трубки. Этот фактор может оказаться особенно действенным при повторном заполнении лавовой трубки, внутренняя поверхность которой может стать шероховатой в процессе постепенного вытекания и охлаждения слоя лавы, прилипшей к земной породе. По этой причине, одновременно с появлением круговых желобков на поверхности освободившегося от лавы трубки, вполне возможно также возникновение продольных желобков, особенно на начальном участке трубки, где лава должна была двигаться подобно потоку ламинарной жидкости. Естественные примеры такого эффекта даны на фотографиях 2-5.

Для подкрепления качественных рассуждений соответствующими количественными оценками воспользуемся конкретным набором параметров модельной лавовой трубки. В частности, будем считать, что длина конусообразной трубки: $L = 1000$ м при половине угла раствора конуса: $\alpha = 1.5^\circ$. Первоначальную величину продольной скорости потока лавы на входе трубки можно определить из уравнения Бернулли (1)

$$U_0 = \left(\frac{2\bar{P}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = (2Hg)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где высоту H примем равной радиусу основания трубки. Т.к. $R = H = 26$ м $ug = 10$ м/с, будем иметь: $U_0 = 23$ м/с. Далее, определим величину гидродинамического сопротивления лавовой трубки. Для этого можно воспользоваться либо формулой, справедливой для гладкой трубы при малых числах Рейнольдса: $\lambda = \frac{64}{Re} = 0.27$, либо известным полуэмпирическим соотношением Блазиуса [2.3]

$$\lambda = 0.316 (Re)^{-\frac{1}{4}}, \quad (12)$$

В этих выражениях для коэффициента гидродинамического сопротивления входит локальное число Рейнольдса, которое для выбранного сечения: $Re = \frac{2R_0 \bar{U}}{\mu}$. Без ограничения общности результатов радиус сечения конусообразной трубки можно считать свободным параметром модели. Например, если выбрать сечение, соответствующее длине: $l_0 = 300$ м, то будем иметь: $R_0 = l_0 \sin \alpha = 7.8$ м. Теперь, можно определить величину характерной скорости течения при помощи формулы (5), в которую, наряду с другими уже известными параметрами, входит коэффициент кинематической вязкости лавы: $\mu = 5$ м²/с. Следует также учесть, что характерная скорость через число Рейнольдса входит также в коэффициент гидродинамического сопротивления, который будем определять по формуле (12). В результате, из (8), если считать, что $\Delta P = \bar{P}$, получим характерную величину, соответствующую выбранному сечению: $\bar{U} \approx 4.8$ м/с. Далее, можно определить толщину вязкого пограничного слоя по формуле (3), в которой все величины, в том числе и безразмерный параметр M , уже известны: $M = 0.3$. Таким образом получим, что в выбранном сечении вязкий пограничный слой практически заполняет модельную лавовую трубку: $\delta_r = 6.9$ м. Следовательно, в этом месте радиус площади, через которую лава движется подобно идеальной жидкости, является достаточно малым по сравнению с радиусом рассматриваемого сечения: $\dot{R} = R_0 - \delta_r \approx 0.9$ м. Поэтому, оценка полной циркуляции скорости по соответствующему этому радиусу контуру может привести к ошибке, т.к.

контур может и не охватывать все вихревые трубки. Однако, нас интересует только качественная оценка циркуляции, которая для отдельных вихревых трубок будет отлична от нуля:

$$\oint V^i dk \neq 0.$$

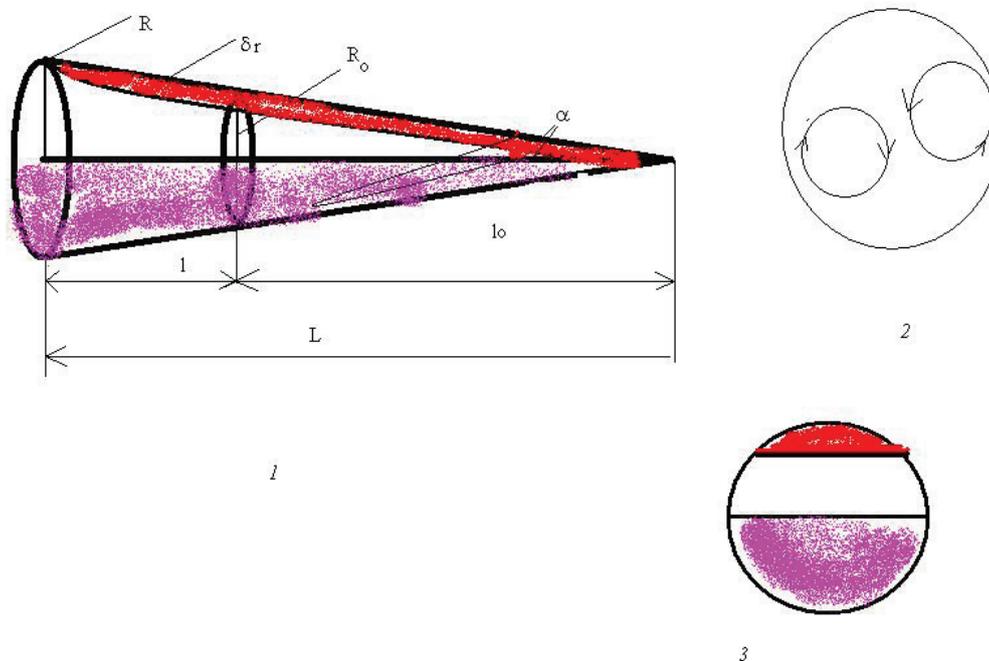


Рис. 1

Заключение. На основании анализа, проведенного при помощи кинематической модели скоростей (3) можно заключить, что если площадь, ограниченная контуром сечения модельной лавовой трубки, является односвязанной областью, то движение в такой лавоводной трубке является однозначно потенциальным. В противном случае, т.е. если лавовая трубка состоит из отдельных элементарных вихревых трубок, что соответствует многосвязанной области, движение в лавовой трубке может быть как вихревым, так и потенциальным. При этом, интенсивность лавовой трубки является алгебраической суммой интенсивностей отдельных вихревых трубок. Согласно модели (3), этот параметр является величиной, со временем уменьшающейся из-за большой вязкости лавы и диссипации энергии вихревого движения. Диссипативный эффект в лавовом потоке будет более мощным в случае возрастания толщины вязкого пограничного слоя. В приближении конусообразной трубки это означает, что максимальный диссипативный эффект будет достигаться в том случае, если пограничный слой полностью заполнит сечение лавовой трубки. Поэтому, со временем вихревое движение должно постепенно угаснуть. Если, к этому моменту времени первоначальная лавовая трубка окажется загруженной не полностью, т.е. в случае, когда расход лавы существенно уменьшается, можно предположить, что возникнут благоприятные условия для полного запирания трубки. Вследствие этого, на месте некоторой части лавовой трубки может образоваться полость (рис.1-3). Она может занять, например, пространство от основания лавовой трубки до или после места ее запирания. Поэтому, нельзя исключить также образование двойной полости, состоящей из

частей, разделенных лавовой перегородкой (Фото 5). Для этого достаточно, чтобы после запираания оставшаяся за перегородкой лава продолжала течь либо до открытого выхода, либо через боковые ответвления лавоводной трубки.

Литература

1. Бармин А.А., Мельник О.Э. Гидродинамика вулканических извержений. Успехи механики. №1. С. 207-212, 2002.
2. Г.Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Гл. 20. Москва, Наука. 1974. 711 с.
3. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. Москва, Наука. 1973. 847 с.
4. X. Binnie A.M. Harris. D.P. The application of Boundary-Layer Theory to Swirling Liquid Flow Through a Nozzle. Quart. J. Mech. and Applied Math. v.3, 1950. pp. 89-106. 1950.
5. Ю.Д.Шевелев. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. Москва, Наука. 1977. 192 с.
6. Н.Е.Кочин, И.А. Кибель, П.В. Розе. Теоретическая гидродинамика, ч. 2, Гостехиздат. 1948. 608 с.
7. А.Г.Хантадзе. Некоторые вопросы динамики проводящей атмосферы. Тбилиси, Мецниереба, 1973. 278 с.
8. Г.З Гершуни, Е.М. Жуховицкий. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва, Наука. 1972. 392 с.
9. V.Kirtskhalia, Z.Kereselidze, N.Dzhondzholidze and M.Chkitunidze. An Analytical Model of an Asymmetrical Temperature Field in the Polar and Auroral Ionosphere. Georgian International J. of Sci. and Tech. №4. 2012, pp. 381-90.
10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. Москва, Наука. 1988. 733 с.
11. Р.Бетчов, В.Криминале. Вопросы гидродинамической устойчивости. Москва, Мир. 1971. 340 с.
12. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Под редакцией Х.Суинни и Дж.Голлаба. Москва, Мир. 1984. 344 с.
13. Фотографии. Интернетресурсы.

კონუსისებრი მიწისქვეშა ლავური მილისჰიდროდინამიკური მოდელი

კერესელიძე ზ. ოდილაგაძე დ.

რეზიუმე

ვულკანების ყელიდან ლავური ამონარქვევების მოძრაობის გამოკვლევა ბლანტი უკუმშვადი სითხის მიახლოებაში საკმარისად ზუსტად შეიძლება ერთსითხოვანი ჰიდროდინამიკის განტოლებებით. ამიტომ, ლავის მოძრაობის დინამიკური სურათის მოდელირებისათვის დასაშვებია ნავიე-სტოქსის განტოლების გამოყენება. ფორმალურად, ვულკანების ფერდებზე და დედამიწის ზედაპირზე მოძრავი ლავის კალაპოტებისათვის დასაშვებია ნებისმიერი ფორმის კვეთის მქონე არხით აპროქსიმაცია. თუმცა, არსებობს აგრეთვე სიღრმული დინებები, როცა ლავა ავსებს მიწისქვეშა სიცარიელეს ან ბზარებს, ან კიდევ, მიწისქვეშა მდინარეების მსგავსად, საკუთრივ ლავა მოძრაობის პროცესში აყალიბებს ლავურ მილს. საყოველთაოდ გავრცელებული ვულკანური წარმოშობის მქონე მღვიმეებისა და გამოქვაბულების სტრუქტურისა და გენეზისის მექანიზმის შესახებ საკმაოდ ცნობილია. თუმცა, უკანასკნელი ათწლეულების განმავლობაში აღმოჩენილი იქნა სპეციფიკური ლავა გამტარები, რომლებიც სტრუქტურულად საკმარისად განსხვავდებიან ჩვეულებრივი ვულკანური გამოქვაბულებისაგან. მათი მოდელირებისათვის ჩვენ გამოვიყენეთ ლავური მილის აპროქსიმაცია კონუსისებური ძაბრით, რომელსაც გააჩნია მცირე გაშლის კუთხე. ცხადია, რომ ასეთი მოდელური მილის კვეთას შეიძლება ჰქონდეს როგორც მრგვალი, ასევე თაღისებური ფორმა.

ჰიდროდინამიკის თეორიიდან ცნობილია, რომბლანტი სითხის ცილინდრულ მილში დინების ამოცანის ზუსტი ანალიზური ამოხსნა ზოგადი სახით, ნებისმიერი სასაზღვრო პირობებისათვის, პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამიტომ, ნავიე-სტოქსის განტოლების ამოხსნისას წარმოქმნილი მათემატიკური პრობლემების გამო, ხშირად იძულებული ვხვდებით გამოვიყენოთ გამამარტივებელი დაშვებები. მაგალითად, შეიძლება დავუშვათ დინების სიმეტრიულობა, ან წმინდა გადატანითი ხასიათი, რაც ნიშნავს, რომ ცილინდრული მილის შიგნით რადიალური მოძრაობა არ არსებობს. თუმცა არსებობს ხერხი, რომლის საშუალებით ბევრ ამოცანაში შესაძლებელია თავიდან ავიშოროთ ის ხელოვნური შეზღუდვები, რომლებიც ამცირებენ გამარტივების შედეგად მიღებული ზუსტი ამონახსნების ღირებულებას. ცნობილია, რომ გარკვეულ პირობებში ფიზიკური მოვლენების სრულფასოვანი რაოდენობრივ-თვისობრივი ანალიზისათვის საკმარისია ე.წ. კინემატიკური მიახლოების გამოყენება. ამ ხერხით მიღებული იყო დინამიკური მეტეოროლოგიისა და ჰიდრაულიკის ბევრი ამოცანის ამონახსნი. კერძოდ, ჩვენს მიერ გამოყენებული იყო ბრტყელი სიჩქარეთა კინემატიკური მოდელი, რომელიც შეესაბამება ლავის ბრუნვას კალაპოტის განივ კვეთაში

$$V_\varphi = \bar{U} \frac{R_0 - r}{R_0} (\cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$V_r = \frac{\bar{U}}{2} \frac{R_0 - r}{R_0} (\cos \varphi + \sin \varphi), \quad (1)$$

სადაც R_0 - ლავური მილაკის რომელიღაც კვეთის რადიუსია.

ამოცანის ძირითადი ჰიდროდინამიკური პარამეტრებია: მახასიათებელი საშუალო სიჩქარე \bar{U} და ბლანტი სასაზღვრო ფენის სისქე ლავური მილაკის შიდა ზედაპირზე δ_r . მათი განსაზღვრისათვის გამოყენებულია მრგვალ მილში ბლანტი სითხის დინების ცნობილი გამოსახულება

$$\bar{U} = \sqrt{\frac{4R_0 \Delta P}{\lambda L \rho}}, \quad (2)$$

აგრეთვე კონუსისებური ძაბრის შიდა ზედაპირზე ბლანტი სასაზღვრო ფენის სისქის ანალიზური ფორმულა

$$\delta_r \approx 1.5(M^3 - M^{16})^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\mu l^3 \cdot (\sin \alpha)^2}{R_0^2 \cdot \left(\frac{2\bar{P}}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

სადაც l_0 -მილია კონუსის წვეროდან R_0 რადიუსის მქონე კვეთამდე, $l = L - l_0$ (L - ლავური მილის სიგრძე), μ - ლავის კინემატიკური სიბლანტის კოეფიციენტი, α - კონუსის გაშლის ნახევარკუთხე, $M = \frac{l_0}{L} \leq 1$ - განუზომელი პარამეტრი, $\Delta P = \bar{P}$ - წნევათა სხვაობა.

მიწისქვეშა ლავური მილის ჰიდროდინამიკური პარამეტრების კონკრეტული ნაკრებისათვის, (1) კინემატიკური მოდელის დახმარებით ჩატარებული ანალიზის საფუძველზე, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ლავური ნაკადის თანდათან ჩახვევის გამომწვევ მიზეზს, ძაბრის ეფექტთან ერთად, შესაძლოა წარმოადგენდეს ლავური მილის შიდა ზედაპირის ხაოიანობა. ეს ფაქტორი შეიძლება განსაკუთრებით ქმედითი

აღმოჩნდეს მილის შიდა ზედაპირზე ქანებზე მიკრული ლავის თანდათან გამოდინებისა და გაცივების დროს. ამ პროცესის შედეგად, განივი ღარების გაჩენასთან ერთად, ლავური მილის შიდა ზედაპირზე შეიძლება წარმოიქმნან აგრეთვე გასწვრივი ღარებიც. ასეთი ეფექტი განსაკუთრებით ალბათურია მილის საწყის უბანზე, სადაც ლავამ სავარაუდოდ უნდა იმოძრაოს ლამინარული სითხის ნაკადის მსგავსად. კონუსისებური ძაბრის მიახლოებაში მაქსიმალური დისიპაციური ეფექტი მიიღწევა იმ შემთხვევაში, როცა ბლანტი სასაზღვრო ფენა სრულად შეავსებს ლავური მილის კვეთას. ამიტომ, დროთა განმავლობაში, გრიგალური მოძრაობა მილში მიიღწევა. თუ ამ მომენტისათვის ლავური მილის დატვირთვა სრული არ აღმოჩნდა, ანუ როცა ლავის ხარჯი მნიშვნელოვნად შემცირდება, შეიძლება დავუშვათ მილის სრული ჩაკეტვისათვის საჭირო პირობების არსებობა. ამის შედეგად ლავური მილის გარკვეულ მონაკვეთზე შეიძლება წარმოიქმნას სიღრუე, რომელმაც შეიძლება დაიკავოს სივრცე მილის ფუძესა და ჩაკეტვის ადგილს შორის, ან მის შემდეგ. აგრეთვე, არ შეიძლება გამოირიცხოს მხოლოდ ტიხარით განცალკევებული ორმაგი სიღრუის წარმოქმნაც. ამისათვის საკმარისია, რომ ჩაკეტვის შემდეგ ტიხარს იქით დარჩენილმა ლავამ გააგრძელოს დინება ან ღია გამოსასვლელის, ან მიწისქვესა კალაპოტის გვერდითი განშტოებების მიმართულებით.

Гидродинамическая модель конусообразной подземной лавовой трубки

Кереселидзе З.А., Одилавадзе Д.Т.

Реферат

Для конкретного набора гидродинамических параметров лавовой трубки, при помощи плоской кинематической модели скоростей, можно заключить, что постепенное завихрение потока лавы может быть вызвано двумя причинами:

1. эффектом гидродинамической воронки;
2. шероховатостью внутренней поверхности лавовой трубки.

Последний из этих факторов может оказаться весьма действенным в процессе вытекания лавы и его охлаждения. В результате этого, наряду с образованием поперечных желобов, на внутренней поверхности лавовой трубки могут возникнуть также и продольные желобы. Такой эффект следует ожидать на начальном участке трубки, где вероятнее всего лава должна двигаться подобно потоку ламинарной жидкости. При приближении конусообразной воронки максимальный диссипативный эффект должен проявиться в том случае, если вязкий пограничный слой полностью заполнит поперечное сечение трубки. В случае полного перекрытия трубки на ее определенной длине может образоваться полость, которая, например, может занять все пространство между основанием трубки и местом ее закрытия.

The hydrodynamic model of an underground conical lava tube

Kereselidze Z., Odilavadze D.

Abstract

Movement of lava eruptions of volcanic vents can accurately investigate the single-fluid hydrodynamics equations in the approximation of an incompressible viscous medium. Therefore, for the simulation of dynamic motion pictures of lava on the channel of any shape can be used Navier-Stokes equations. Approximation of open channel having a cross-section of any shape, fully corresponds to the lava beds on the slopes of volcanoes and Earth's surface. However, there are also ground lava flows, when it fills in the land existing voids and cracks, or like underground rivers, itself generates the motion lava tube. The structure and mechanism of the genesis meets with everywhere, studied in sufficient detail, grottoes and caves of volcanic origin known for a long time. However, in recent decades it has been discovered underground lava specific, are structurally quite different from ordinary volcanic caves. In particular, we used the approximation of underground lava tubes conical funnel having a small opening angle. Obviously, such a model that the cross section of the tube can be both round and arch form. From the hydrodynamic theory it is known that the exact solution of the problem of motion of a viscous fluid in a cylindrical tube, in general, for arbitrary boundary conditions is analytically challenging. Therefore, because of the emergence of mathematical problems related to the solution of the Navier-Stokes equations, have to resort to the simplifying assumptions. For example, the symmetry can be tolerated during, or assume that the motion axially portable, i.e. radial flow within the cylindrical pipe is missing. We can also assume that there is no fluid flow, i.e., motion of the medium in the pipe is radially rotating. However, there is a method in many problems avoiding artificial constraints to understate the value of simplified exact solutions. It is known that under certain conditions, for a full qualitative and quantitative analysis of the physical phenomena is sufficient to use kinematic approach. Thus it was obtained by solving many problems of dynamic meteorology and hydraulics. In particular, we used the following planar kinematic model velocity corresponding rotational motion in the cross section of lava bed

$$\begin{aligned}V_{\varphi} &= \bar{U} \frac{R_0 - r}{R_0} (\cos \varphi - \sin \varphi), \\V_r &= \frac{\bar{U}}{2} \frac{R_0 - r}{R_0} (\cos \varphi + \sin \varphi), \\0 &\leq r \leq R_0,\end{aligned}\tag{1}$$

where R_0 - radius of a section of a lava bed. To determine the key hydrodynamic parameters, the characteristic velocity \bar{U} and the thickness of the viscous boundary layer on the inner surface of the lava tube, we may use the well-known expression for the average velocity of fluid flow in a circular tube

$$\bar{U} = \sqrt{\frac{4R_0\Delta P}{\lambda L \rho}},\tag{2}$$

as well as the analytical formula for the thickness of the viscous boundary layer on the inner surface of the conical funnel

$$\delta_r \approx 1.5(M^3 - M^{16})^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\mu l^3 \cdot (\sin \alpha)^2}{R_0^2 \cdot \left(\frac{2\bar{P}}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

where l_0 - distance from the apex of the cone section to the radius R_0 , $l=L-l_0$ (L is the length of a lava bed), μ - kinematic viscosity of lava, α - Half angle of the cone, $M = \frac{l_0}{L} \leq 1$ -dimensionless parameter, $\Delta P = \bar{P}$ -pressure.

On the basis of the analysis carried out by means of the kinematic velocity model (1) for a particular set of the hydrodynamic parameters of underground lava tubes can conclude that possible causes gradual twisting lava flows, together with the effect of the funnel, may also be an inner surface roughness lava tube. This factor can be particularly effective when re-filling lava tubes whose inner surface may be rough in the process of gradual outflow and cooling layer of lava, clinging to the rock of the earth. As a result, along with the advent of circular grooves in the outflow of lava on the inner surface of the underground lava tubes may be formed as longitudinal troughs. This effect is most likely during the initial portion of the tube through which lava has to move like a laminar flow of liquid. Natural examples of this effect are the photographs of various lava tubes. In the approximation of a conical funnel dissipative maximum effect will be achieved when the viscous boundary layer completely fills the cross section of an underground lava tube. Therefore, over time, a swirling motion in the tube must be extinguished. If this point in time lava tube will not fully loaded, so when the flow of lava considerably decreases, we can assume the appearance of favorable conditions for the complete closing of the tube. As a consequence in place of a segment tube lava can form a cavity. The cavity can take not only the space from the bottom of the lava tube to the point of its closing, but also after it. We can not exclude also the formation double cavity consisting of parts, separated by a lava wall. It's enough that after locking the rest of the partition or the lava continued to flow to the open outlet or through lateral branches of the underground channel.