

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ПАРАМЕТРОВ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Гвелесиани А.И.

*Институт геофизики им. Михаила Нодиа Тбилисского государственного университета  
им. Иванэ Джавахишвили, 0160, Тбилиси, ул. М. Алексидзе, 1*

### I. Введение.

Рассматриваются в основном вопросы термодинамики и кинетики возникновения и роста спонтанных зародышей пара в перегретых частях жидкости на стенках и на дне нагреваемого сосуда. Метастабильные – не устойчивые фазовые состояния системы – и стеклообразные – “замороженные” состояния веществ большой вязкости с затруднённой молекулярной перестройкой, сопровождающей непрерывные изменения исходной фазы, в настоящей статье особо не рассматриваются. Для статистической физики термодинамика, в силу её универсальности, является своего рода пробным камнем, как в случае квантовой механики таковым является классическая механика. В то время как равновесия гомогенных систем изображались уравнением, в гетерогенных системах, такую же роль играло пространственное геометрическое изображение равновесных состояний (Тамман). Сходство и различие фазовых состояний жидкость-пар, жидкость-кристалл до сих пор привлекают к себе внимание теоретиков и экспериментаторов разных стран. Анализируются результаты известных и собственных работ в этом направлении. В развитии теории Гиббса следует отметить революционную роль классических работ Ван-дер-Ваальса (теория непрерывности перехода газа в жидкость) и Френкеля (кинетическая теория жидкостей), дальнейшее развитие которых в теоретическом и экспериментальном направлениях дано в статьях Зельдовича-Кагана, Дер-Гарабедиана, в монографиях Скрипова, Бреннена и Бубнова и Голицына. Значительные сдвиги произошли в статистической механике за последние 30 лет в связи с появлением цикла работ Цаллиса, введшего новое понятие об неэкстенсивной (неаддитивной) энтропии. Высказывается идея о возможности использования метода теории узлов Гаусса-Боне, развитого Дианой Вашакмадзе в области физики частиц и космологии, к иерархии вихрей турбулентности в газовой среде и термодинамики пузырькового кипения жидкости [1 – 54].

**Ключевые слова:** гомогенная и гетерогенная системы, фазовые переходы, нуклеация, стеклообразное состояние, неэкстенсивная, неаддитивная энтропия, турбулентные вихри, пузырьковое кипение, теория узлов.

### II. Эксперимент и теория кипения жидкости.

На базе экспериментального комплекса Термобарокамеры Института геофизики впервые, методом пузырькового кипения жидкости, ставятся и анализируются совместные эксперименты по моделированию термохимической конвекции, процесса образования термиком в различных геофизических средах, в частности, образования кучевых облаков, расслоения подоблачной и

облачной сред и пр. Исследование конвективных движений, связанных с экстраординарными явлениями природы (штормы, вулканы, движение тектонических плит, землетрясения и др.) является одним из самых актуальных научных и социальноэкономических проблем. Трудности численных экспериментов и теоретических исследований этих процессов привели учёных мира к единодушному мнению о необходимости проведения соответствующих лабораторных экспериментов. Последние имеют не только прикладное, но и самостоятельное значение. Предложенным методом пузырькового кипения жидкости лабораторного моделирования термодинамической конвекции был получен ряд новых результатов. Для широкого диапазона плотностей растворов в ходе кривых зависимости температуры  $T(t)$  и энтропии  $S(T)$  обнаружены точки разрыва непрерывности второго рода (в диапазоне  $(40-80)^\circ\text{C}$ ), после которой кривые отклоняются от начального линейного хода, изгибаются и параболически приближаются к точке кипения  $100^\circ\text{C}$ .

## 2.1. Схема установки и характеристики термодинамической системы.

Экспериментальная установка. Первые результаты [12, 13].

Ниже приведена схема установки для моделирования вертикального одномерного двухфазного конвективного течения жидкости [13].

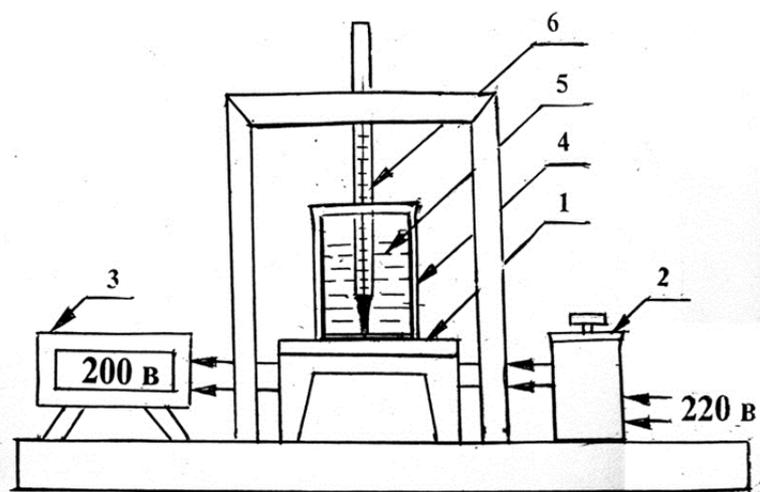


Рис. 1. Схема установки: 1 – электрическая плита, 2 – лабораторный автотрансформатор (ЛАТР), 3 – цифровой вольтметр, 4 – стеклянная колба, 5 – раствор, 6 –термометр

Рис. 1 показывает минимальное количество инструментов для проведения экспериментов с достаточно высокой точностью и полнотой информации о параметрах изучаемой системы. Хотя эта схема весьма проста, тем не менее, благодаря тщательности и многократному повторному проведению измерений, были установлены, на наш взгляд интересные явления, сопровождающие процесс пузырькового кипения, важные для изучения особенностей конвекции в соответствующих геофизических средах. Результаты отражены в рисунках и таблицах, обсуждены кратко, выводы сформулированы в цикле работ [12-18].

## 2.2. Новые результаты [18].

Моделирование вертикальной конвекции в естественных условиях оригинальным методом пузырькового кипения (ППМ) жидкости, позволило экспериментально исследовать поведение термодинамической системы (образцов природных вод и искусственных водных растворов) в течение процесса их нагрева до интенсивного крупно-пузырькового кипения. Для точного установления моментов наступления микро- и макро-масштабного режимов пузырькового кипения

жидкости были построены и проанализированы экспериментальные кривые зависимостей:  $(T, t)$  – температура-время,  $(dT/dt, T)$  – скорость нарастания температуры-температура,  $(d^2T/dt^2, T)$  – ускорение нарастания температуры-температура. В результате при  $40^\circ\text{C}$  и  $80^\circ\text{C}$  точки перегиба кривой  $(dT/dt, T)$  проявились, как и следовало ожидать, в виде ярко выраженных максимумов на кривой  $(d^2T/dt^2, T)$ . Ниже приведены соответствующие результаты в виде графиков, отражающие новые стороны режима кипения чистой воды и водных растворов различных веществ и природных вод Грузии (Рис. 2 – 5).

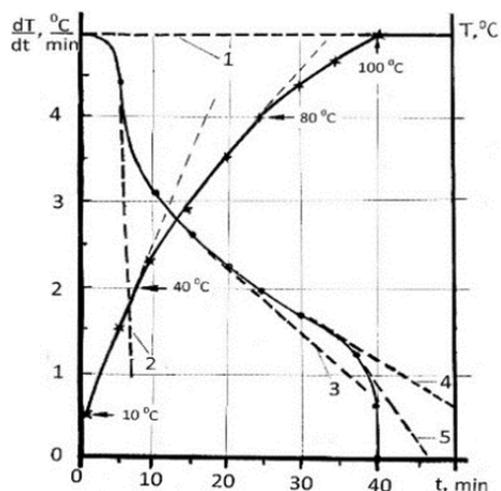


Рис. 2.  $(dT/dt, t)$ -кривая показывает зависимость скорости роста температуры от времени,  $t$  (кривая соединяет точки (●));  $(T, t)$ -кривая показывает изменение температуры жидкости от времени,  $t$  (кривая соединяет крестики (x)), [18].

Для более точного определения моментов наступления режимов микро- и макро-пузырькового кипения жидкостей соответственно при температурах  $T = 40^\circ\text{C}$  и  $T = 80^\circ\text{C}$ , была построена кривая ускоренного роста температуры во времени в зависимости от температуры жидкости  $(d^2T/dt^2, T)$  (Рис. 2.). Здесь мы видим в обеих точках экстремумы, всплески кривой  $(d^2T/dt^2, T)$ , соответственно при значениях температуры  $T = 40^\circ\text{C}$  и  $T = 80^\circ\text{C}$  (на Рис.1 хорошо видно, как кривая зависимости  $(T, t)$  преломляется именно при этих значениях температуры, которые проявляются в виде точек перегиба на кривой  $(dT/dt, T)$ , наличие которых подтверждается указанными выше двумя максимумами кривой  $(d^2T/dt^2, T)$ ). Таким образом, их наличие не случайно и математически оправдано.

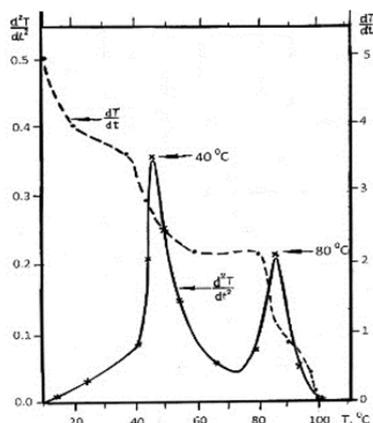


Рис. 3.  $(dT/dt, T)$ -кривая показывает скорость роста температуры жидкости от температуры,  $T$ , (кривая соединяет точки (●));  $(d^2T/dt^2, T)$ -кривая показывает зависимость ускорения роста температуры от  $T$  (точки (x)), [18].

Эстремумы кривой ( $d^2 T/dt^2$ ,  $T$ ) на Рис. 3 соответствуют точкам ( $T_{dc}$ ).

Ниже представлены оригинальные универсальные экспериментальные кривые ( $T_{dc}$ ,  $\rho_{dc}$ ), полученные нами для водных растворов NaCl,  $C_{12}H_{22}O_{11}$  и других веществ (Рис. 4).

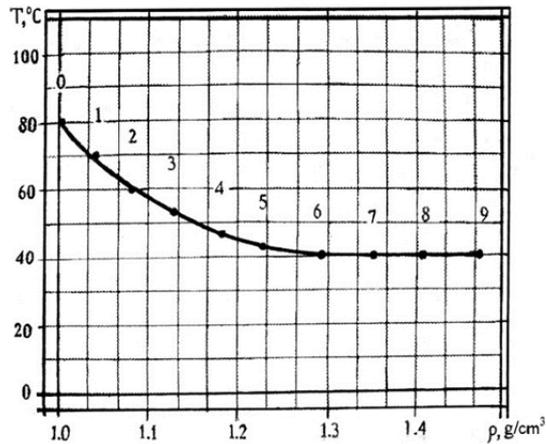


Рис. 4. Универсальная экспериментальная кривая зависимости температуры,  $T$ , в момент второго рода разрыва непрерывности, от концентрации,  $\rho$ , для любого воднораствора вещества, [13]

На Рис.4 показана оригинальная универсальная экспериментальная кривая зависимости ( $t_{dc}$ ,  $\rho_{dc}$ ) - время-плотность, полученная нами как для водных растворов, представленных на Рис. 4 (●) и для естественных вод Грузии (x) методом пузырькового кипения жидкости.

Рис. 5 показывает оригинальную универсальную экспериментальную кривую зависимости ( $t_{dc}$ ,  $\rho_{dc}$ ) – время-плотность раствора.

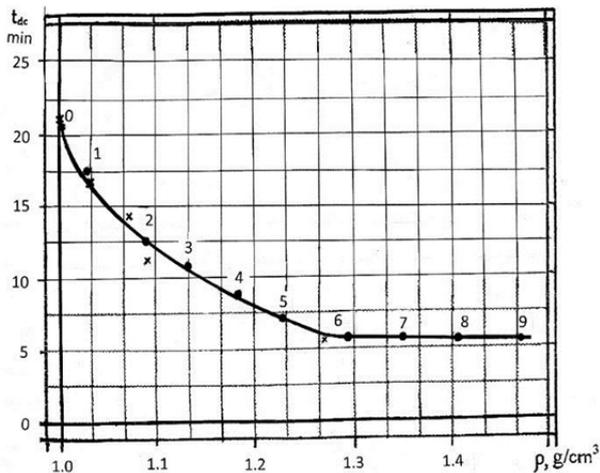


Рис. 5. Универсальная кривая зависимости температуры  $T$ , второго рода разрыва непрерывности в момент времени  $t_{dc}$ , от концентрации,  $\rho$ , для любого водного раствора вещества. Знаки (●) соответствуют вышеупомянутым искусственным растворам; знаки (x) – естественным водам Грузии, [18].

Кривые Рис. 4 и 5, имеющие сходное поведение, показывают сильное влияние плотности раствора на начало режима пузырькового кипения в процессе нагрева жидкости. Стало быть, между  $T_{dc}$  и  $t_{dc}$  существует линейная зависимость (результат совместного действия теплопроводности жидкости, конвективного движения, смешения термиком и паровых пузырьков; для  $q = \text{const.}$  имеем  $(dT/d\rho)_{dc} = \text{const.}$ ,  $(d\rho/dt)_{dc} = \text{const.}$  и  $(dS/dT)_{dc} = \text{const.}$

## 2.3. К построению оригинальной универсальной кривой (T, t) природных вод Грузии [16, 17].

На Рис.6 приведены экспериментальные кривые (T,t) – зависимостей для различных природных вод Грузии. В скобках указывается время начала пузырькового кипения для каждой пробы вод. Указывается установленная плотность взятых проб. (1) – источник г. Цалка (21.5 мин); (2) – Черное море, г. Анаклиа (17 мин); (3) – серные воды близ оз. Лиси (14.5 мин); (4) – серные воды бань старого Тбилиси (11 мин); (5) – насыщенный водный раствор мёда (7 мин).

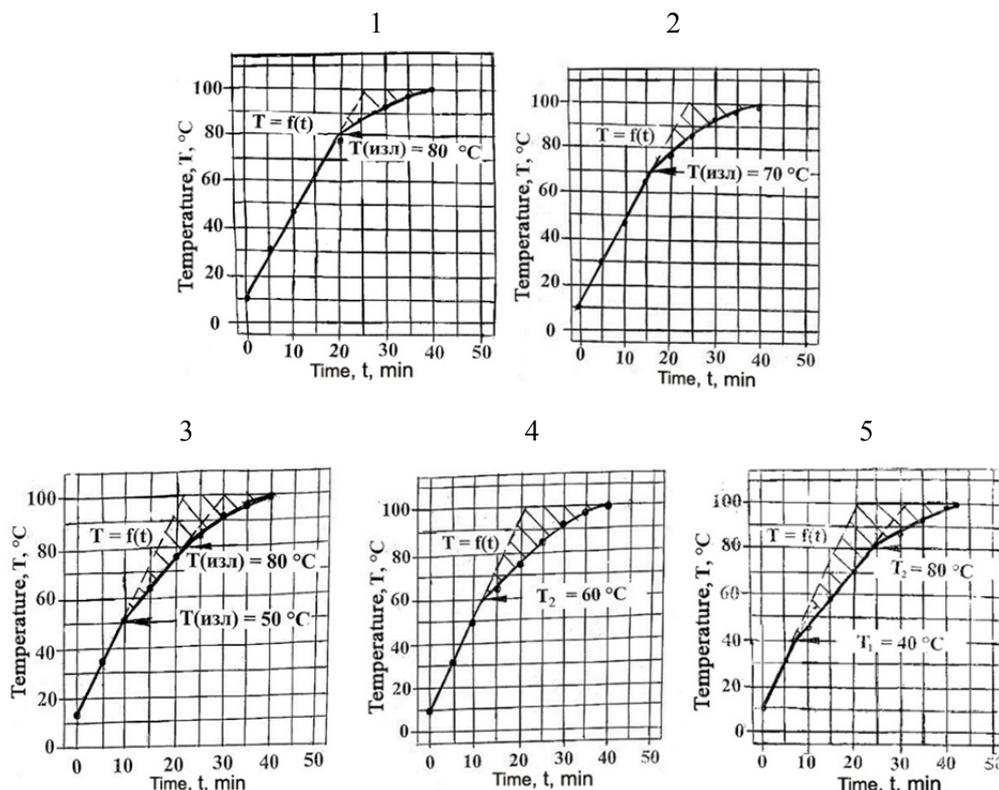


Рис. 6. Экспериментальные (T, t)-кривые нагрева проб естественных вод Грузии: (1) –  $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ , (2) –  $\rho = 1.02 \text{ g/cm}^3$  (3) –  $\rho = 1.07 \text{ g/cm}^3$ , (4) –  $\rho = 1.08 \text{ g/cm}^3$ ; (5)  $\rho = 1.27 \text{ g/cm}^3$ .

## III. Типы нуклеации [1-8]

**3.1. Гомогенная нуклеация.** Впервые теория образования зародышей пузырьков пара в чистой воде была дана Гиббсом. Основные соотношения следующие [8]. Согласно гомогенной теории работа образования пузырька пара критического размера ( $R_{кр}$ ) выражается формулой

$$W_{кр} = \frac{4}{3} \pi R_{кр}^2 \sigma, \quad (3.1)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости;  
 скорость зародышеобразования пузырьков (здесь  $W_{кр} / kT = Gb$  – число Гиббса) равна

$$J = J_0 \exp(-W_{кр} / kT), \quad (3.2)$$

где  $J_0$  – фактор пропорциональности, для которого известно типичное молярное соотношение

$$J_0 = N \left( \frac{2\sigma}{\pi m} \right)^{i/2}, \quad (3.3)$$

где  $N$  – молекулярная плотность жидкости (молекулы /  $\text{m}^3$ ),  $m$  – масса молекулы.

**3.2. Гетерогенная нуклеация.** В первом случае нуклеации рассматривались микроскопические пустоты, которые растут, вызывая разрыв, когда давление на жидкость,  $p$ , становится ниже критического значения  $p_v - 2\sigma/R$ . Следовательно, растягивающее усилие равняется  $2\sigma/R$ . В этом случае имеет место контакт жидкость/ пар/твёрдое тело. Указанное усилие вытягивает пузырь пара из возможной шероховатости контактной поверхности. Этот вопрос – вне поля нашего зрения.

**Замечание:** Поразительно внешнее сходство геометрической формулы Эйлера о связи между параметрами правильного многоугольника ( $F = E + 2 - V$ , где  $F$  – число граней,  $E$  – число рёбер,  $V$  – число вершин) и правилом фаз Гиббса ( $F = N + 2 - R$ , где  $F$  – число степеней свободы,  $N$  – число компонент,  $R$  – число фаз в равновесии) (см. [18]).

#### IV. Метастабильное состояние жидкости.

**4.1.** Ниже рассматривается кинетика процесса перегрева жидкости близ поверхности нагрева согласно работам [19-21].

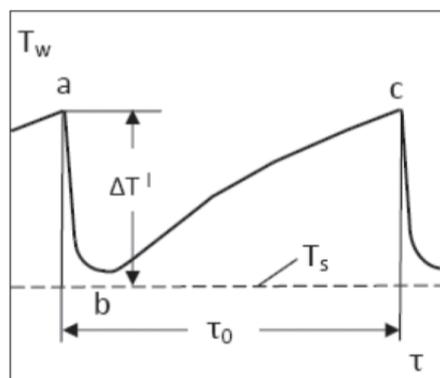


Рис. 7. Типичный цикл пульсаций нагреваемой поверхности:  
 $T_w$  – локальный перегрев поверхности;  $T_s$  – температура насыщения;  
 $\Delta T'$  – максимальный перегрев;  $\tau$  – время;  $\tau_0$  – длительность цикла [20].

На Рис. 7 показан типичный цикл локальной пульсации нагреваемой поверхности, где  $T_w$  – локальная температура нагреваемой поверхности;  $T_s$  – температура насыщения;  $\Delta T'$  – максимальный перегрев;  $\tau_0$  – длительность цикла пульсации. Как видим, здесь дана качественная картина пульсаций температуры нагреваемой поверхности при определённом максимальном перегреве жидкости близ поверхности её нагрева. Очевидно, что обратная периоду  $\tau_0$  величина равна количеству образующихся и отрывающихся в единицу времени от стенки газовых пузырей. Автор работы [19] приводит в соответствие собственные результаты по формированию и отрыву парового пузыря от стенки сосуда с кипящей жидкостью с вышеприведёнными результатами [20]. Далее в [19] проведён критический анализ известных исследований собственных и других авторов почти за полувековой период. Наше внимание привлекает кинетика процесса зарождения и роста парового пузыря в нагреваемой жидкости в зависимости от степени её перегрева. В частности интересен результат расчёта перегрева температуры жидкости,  $\Delta T_{eq}$ , необходимого для начала роста образовавшегося пузыря пара с равновесным мениском [21],

$$\Delta T_{eq} = \frac{2\sigma T_s}{\lambda \rho_0 \rho'_s}, \quad (4.1)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $\lambda$  – скрытая теплота парообразования,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $\rho'_s$  – плотность пара.

На основе собственных исследований автор работы [19], следуя работе [20], строит в первом приближении зависимость  $(T_w, \tau)$ , приведённую на Рис. 7.

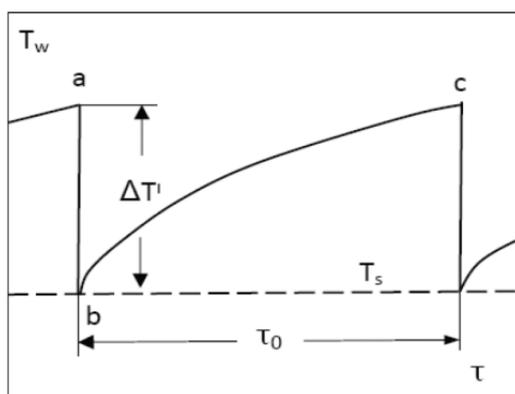


Рис. 8. Обозначения те же, что и на Рис. 4 [19].

Из Рис. 8 хорошо видно, что  $\Delta T' \gg \Delta T_{eq}$ . Как и следовало ожидать, на образование зародыша пузыря необходим значительно бóльший температурный перегрев (бóльшая энергия для его образования), чем перегрев, необходимый для начала роста пузыря после его зарождения. Желательно было бы, чтобы автор работы [19] решил задачу во втором и др. приближениях также. Замечание к обоим результатам: как качественные, эти диаграммы пригодны для всех жидкостей; информация [19] была бы весьма ценной при наличии количественных данных, например, для чистой воды и водных растворов [12-18]. Рассмотрим вкратце результаты теоретических работ [3, 4, 6] в интерпретации монографии [7]; автор статьи [6], поправляя ошибку, допущенную в работе [4], но восхищённый методом, применённым в последней, вместо кавитации рассматривает кинетику процесса кипения чистой воды [6]. Как уже отмечалось выше, эта проблема экспериментально исследовалась для чистой воды и для водных растворов веществ [12-18]. Далее анализируются некоторые результаты [19-23].

## V. Динамика сферического пузырька [8, 33].

**5.1.** Каганом (1960) [6] сделана попытка получить общее выражение для скорости вскипания перегретой чистой жидкости, справедливое для любых  $p_0$ , методом Зельдовича (1942) [4]. При этом приняты во внимание лимитирующие скорость роста пузырька факторы: вязкость, инерционность, скорость испарения в полость и скорость подвода тепла к поверхности полости. Это ранние работы, поэтому ниже будут даны новые результаты, обобщённые в работе Бреннена [8].

Рассмотрим сферический пузырь пара радиуса  $R$  в неограниченной жидкости. Считается, что плотность жидкости  $\rho_L$  постоянна. Радиальное движение (рост) пузырька сферически симметрично раздвигает окружающую жидкость на расстоянии  $r$  от центра пузырька со скоростью

$$u(r, t) = \frac{F(t)}{r^2}, \quad (5.1)$$

Где  $F(t)$  определяется кинематическим граничным условием близ поверхности пузырька. В случае отсутствия переноса массы через поверхность  $u(R, t) = dR/dt$  и, следовательно,

$$F(t) = R^2 \frac{dR}{dt}. \quad (5.2)$$

Будем считать что при росте пузырька во времени, граница её непроницаема и имеет скорость  $dR/dt$ . Тогда объемная скорость роста пузырька будет равна  $4\pi R^2 dR/dt$ . Массовая скорость испарения будет  $\rho_v 4\pi R^2 dR/dt$  (где  $\rho_v$  плотность насыщенного пара), в свою очередь это должно равняться массе втекающей жидкости, тогда скорость втекания жидкости относительно поверхности даётся выражением  $\rho_v (dR/dt)/\rho_L$ . Следовательно,

$$u(R,t) = \frac{dR}{dt} - \frac{\rho_v}{\rho_L} \frac{dR}{dt} = \left[ 1 - \frac{\rho_v}{\rho_L} \right] \frac{dR}{dt} \quad (5.3)$$

и

$$F(t) = \left[ 1 - \frac{\rho_v}{\rho_L} \right] R^2 \frac{dR}{dt}. \quad (5.4)$$

## 5.2. Обобщение уравнения Релея-Плессета для вязкой жидкости.

1. Для радиальной составляющей скорости уравнение Навье-Стокса,

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \nu_L \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2u}{r^2} \right] \quad (5.5)$$

даёт после подстановки  $u = F(t)/r^2$ :

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dt} - \frac{2F^2}{r^5}. \quad (5.6)$$

Заметим, что вязкие члены исчезают; лишь единственный вязкий содействующий фактор, ведущий к уравнению Релея-Плессета, исходит из динамического граничного условия близ поверхности пузырька. Последнее уравнение может быть проинтегрировано и приведено к виду

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{r} \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \frac{F^2}{r^4} \quad (5.7)$$

после приложения условия  $p \rightarrow p_\infty$ , когда  $r \rightarrow \infty$ .

Для завершения этой части анализа рассмотрим динамику граничного условия на поверхности пузырька. На тонкую плёнку поверхности пузырька действуют радиально направленные сила давления пара ( $p_B$ ), противоположно направленная сила поверхностного натяжения ( $-2\sigma/R$ ) и радиальная составляющая тензора напряжений скорости ( $(p_{rr})$ ):

$$(p_{rr})_{r=R} + p_B - \frac{2\sigma}{R}. \quad (5.8)$$

или коль скоро  $(p_{rr})_{r=R} = -p + 2\mu_L \partial u / \partial r$ , то сила давления на поверхность пузырька равна

$$p_B - (p)_{r=R} - \frac{4\mu_L}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R} \quad (5.9)$$

При отсутствии массо-переноса через границу пузырька (испарение или конденсация) эта сила равна нулю, и подставляя значение для  $(p)_{r=R}$  из уравнения (5.6) при  $F = R^2 dR/dt$ , получаем обобщённое уравнение Релея-Плессета для динамики пузырька:

$$\frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2\sigma}{\rho_L R}. \quad (5.10)$$

При определённом  $p_\infty(t)$  уравнение (5.8) может быть решено для нахождения  $R(t)$ , когда  $p_B(t)$  известно. При отсутствии поверхностного натяжения и вязкостного членов это уравнение было выведено и использовано Релеем (1917) [34]. Плессет (1949) [35] впервые применил это уравнение к проблеме движения пузырька при кавитации.

2. Вышерассмотренные уравнения относились к чистым жидкостям (чистой воде). Газовые пузыри состояли только из пара. В случае же растворов кроме молекул пара присутствуют примеси газа, т.е. пузырек многокомпонентен. Обозначая парциальное давление газовой примеси через  $p_G$  при радиусе  $R_0$  и температуре  $T_\infty$ , если нет заметного переноса газа в жидкость, следует, что

$$p_B(t) = p_V(T_B) + p_{G_0} \left( \frac{T_B}{T_\infty} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^3. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в (5.12), получим уравнение Релея-Плессета в виде

$$\begin{aligned} \frac{p_V(T_\infty) - p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_V(T_B) - p_V(T_\infty)}{\rho_L} + \frac{p_{G_0}}{\rho_L} \left( \frac{T_B}{T_\infty} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 = \\ = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2\sigma}{\rho_L R}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

которое для политропического процесса даёт

$$p_G = p_{G_0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3k}, \quad (5.13)$$

где  $k$  – экспериментальная постоянная, и уравнение Релея-Плессета принимает вид

$$\frac{p_V(T_\infty) - p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_{G_0}}{\rho_L} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3k} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}(\dot{R})^2 + \frac{4\nu_L\dot{R}}{R} + \frac{2\sigma}{\rho_L R}. \quad (5.14)$$

где точка над  $R$  обозначает  $d/dt$ . (соответствующие ссылки даны в работе в [8]: без вязкостного члена уравнение Релея-Плессета (5.13) было исследовано Нолтингом и Непирасом (1950, 1951), а с вязкостным членом впервые был исследован Порицким (1952))

### 5.3. Термический контроль роста пузырька [34, 36, 5].

Приведём для иллюстрации графическое представление временной зависимости радиуса растущего парового пузырька в воде при перегреве  $T = 103,1$  °C, построенные по Релею [34] – с сильным расхождением с экспериментом [5] – и по теории Плессета-Цвика [36], хорошо согласующейся с экспериментальной кривой [5].

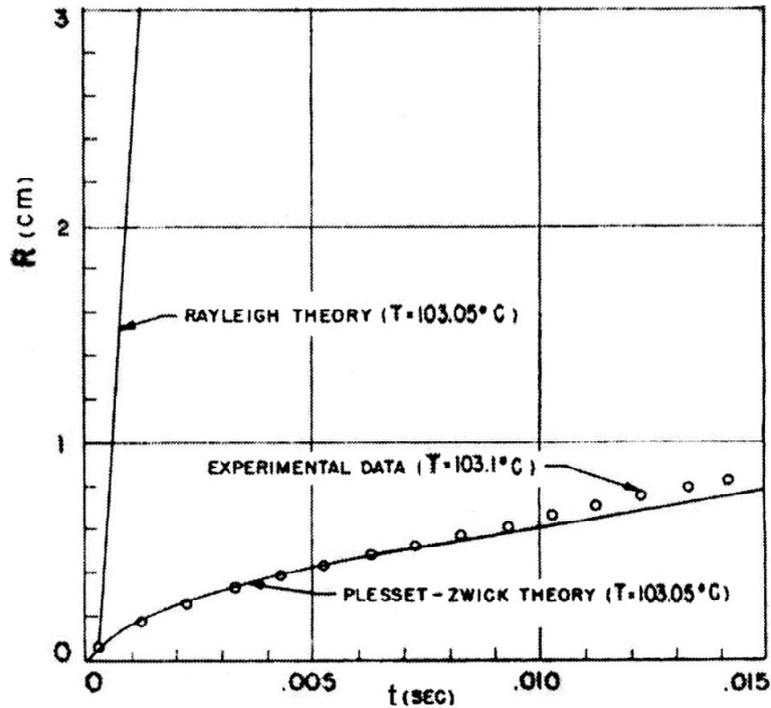


Рис. 9. Сравнение теории с экспериментом. Сплошная прямая линия построена по Релею [34], сплошная изогнутая кривая – по Плессету-Цвику [36], треугольниками отмечены экспериментальные точки [5].

#### 5.4. Устойчивость пузырька пар-газ (согласно Блейку (1949), [8])

Блейк, изучавший начало процесса кавитации, считает важным признать тот факт, что условие равновесия пузырька паро-газового содержания,

$$p_V - p_\infty + p_{GE} - \frac{2\sigma}{R_E} = 0, \quad (5.15)$$

не может обычно представлять устойчивое состояние равновесия при  $R = R_E$  с парциальным давлением газа  $p_{GE}$ .

Рассмотрим малое возмущение в размере пузырька от  $R = R_E$  до  $R = R_E(1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$  и возмущённое уравнение Релея-Плессета. Следует при этом различать два возможных случая:

- (а) парциальное давление газа остаётся тем же, как при равновесии  $p_{GE}$ ;
- (б) масса газа в пузырьке и его температура,  $T_B$ , остаются прежними.

С практической точки зрения возмущение в случае (а) генерируется в течение времени, достаточного для того, чтобы парциальное давление газа оставалось бы при величине, соответствующей концентрации растворённого газа в жидкости. С другой стороны, в случае (б) принимается во внимание, что он должен слишком быстрым для обеспечения значительной диффузии газа. Отсюда следует, что в случае (а) газовый член в уравнении Релея-Плессета (5.14) есть  $p_{GE}/\rho_L$ , в то время как в случае (б) он равен  $p_{GE}R_E^{3k}/\rho_LR^{3k}$ . Если определить  $n$  как нуль в случае (а), и  $n = 1$  в случае (б), затем, подставляя  $R = R_E(1 + \varepsilon)$ , получаем

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}(\dot{R})^2 + 4v_L \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\varepsilon}{\rho_L} \left[ \frac{2\sigma}{R_E} - 3nk p_{GE} \right]. \quad (5.16)$$

Правая часть (5.16) имеет тот же знак, что и  $\varepsilon$ . Если

$$\frac{2\sigma}{R} > 3nk p_{GE}, \quad (5.17)$$

тогда скорость и ускорение роста радиуса пузырька во времени имеют тот же знак, как и возмущение и, следовательно, равновесие будет неустойчивым, коль скоро результирующее движение заставит пузырёк удаляться от  $R=R_E$ . С другой стороны, равновесие устойчиво, если  $np_{GE} > 2\sigma/3R_E$ .

Случай (а) всегда должен быть неустойчивым, ибо неравенство (5.17) при  $n = 0$  выполняется. Это означало бы, что время диффузии массы при росте или сокращения длилось бы бесконечно долго.

Случай (b) более интересен в технических задачах, где уровни давления меняются в короткое время сравнительно со временем, необходимым для значительной диффузии газа. В этом случае для стабильности пузырька требуется условие

$$p_{GE} = \frac{m_G T_B K_G}{\frac{4}{3} \pi R_E^3} > \frac{2\sigma}{3kR_E}, \quad (5.18)$$

где  $m_G$  – масса газа в пузырьке,  $K_G$  – газовая постоянная. Действительно, для данной массы газа существует пузырёк критического размера, впервые найденный Блейком (1949) и Непирасом и Нолтингком (1951) и цитируемый как критический радиус Блейка (5.19):

$$R_C = \left[ \frac{9km_G T_B K_G}{8\pi\sigma} \right]^{1/2}. \quad (5.19)$$

Все пузыри с радиусом  $R_E < R_C$  могут существовать в устойчивом равновесии, тогда как все пузыри с радиусом  $R_E > R_C$  должны быть неустойчивыми. Критического размера можно достигнуть уменьшением давления окружающей среды от  $p_\infty$  до критического значения,  $p_{\infty c}$ , которое получается из уравнений (5.15) и (5.19):

$$p_{\infty c} = p_V - \frac{4\sigma}{3} \left[ \frac{8\pi\sigma}{9km_G T_B K_G} \right]^{1/2}, \quad (5.20)$$

часто называемое пороговым давлением Блейка.

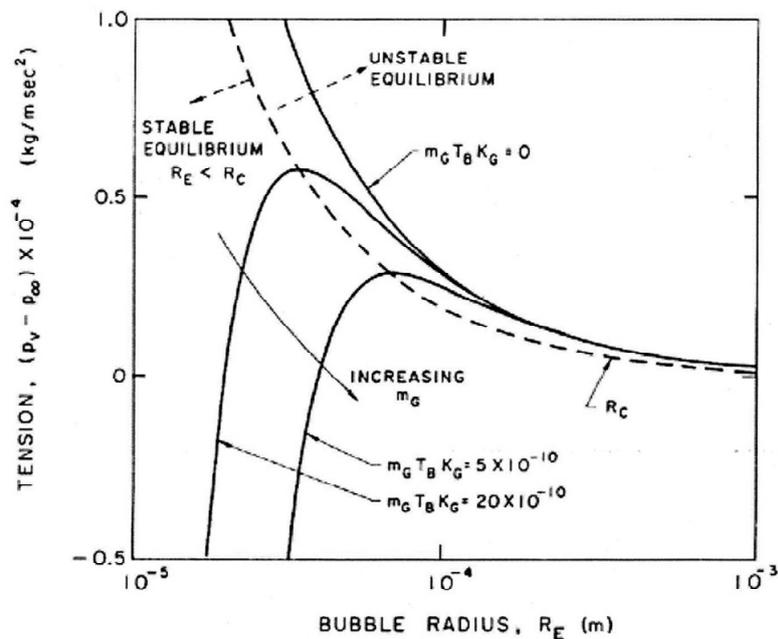


Рис. 10. Радиусы устойчивого и неустойчивого равновесия, как функция растягивающего напряжения пузырьков различных масс газа. Области устойчивого и неустойчивого равновесий разделены прерывистой линией (по Дейли и Джонсону (1956), [8])

На Рис. 10 графически представлен изотермический случай ( $k = 1$ ), где сплошные линии представляют равновесные состояния пузырька с радиусом  $R_E$ , по отношению растягивающего напряжения  $(p_V - p_\infty)$  для различных фиксированных масс газа в пузырьке и фиксированного поверхностного натяжения. Геометрическое место пиков есть график значений  $R_C$  представлено прерывистой линией, уравнение которой есть  $(p_V - p_\infty) = 4\sigma/3R_E$ . Область справа от неё представляет состояние неустойчивого равновесия. Это графическое представление было использовано Дейли и Джонсоном (1956) для визуализации квазиклассической реакции пузыря, подверженного понижающемуся давлению. Начиная с четвёртого квадранта при условиях, в которых окружающее давление  $p_\infty > p_V$ , и полагается, что масса газа в пузырьке постоянна, радиус  $R_E$ , сперва увеличится, так как давление  $(p_V - p_\infty)$  возрастает. Пузырь пройдёт через серию устойчивых состояний равновесия до тех пор, пока исключительное критическое давление не достигнет максимума. Любое слабое уменьшение в  $p_\infty$  ниже значения, соответствующего этой точке, приведёт к взрывному росту кавитации, независимо от того,  $p_\infty$  уменьшится в дальнейшем или нет. Действительно, из этого анализа следует, что для жидкости критическое напряжение натяжения скорее давалось бы выражением  $4\sigma/3R$ , чем  $2\sigma/R$ , утверждаемое ранее, коль скоро стабильное состояние равновесия не существует в области

Иной вопрос возникает из анализа Рис. 10. Заметим, что для данного поодкритического напряжения натяжения существуют два альтернативных состояния, одно менее стабильное состояние, другое более нестабильное состояние. Допустим, что пузырь при менее стабильном состоянии подвергается ещё давлению осцилляций существенной величины, чтобы заставить пузырь мгновенно превысить размер  $R_C$ . Он мог бы тогда расти взрывообразно без ограничения. Этот эффект важен для понимания роли турбулентности в начале кавитации или реакции жидкости на акустическое поле.

### 5.5. Рост пузырька, как вариационная задача [39].

Будем исходить из обобщённого уравнения Релея-Плессета для динамики пузыря (5.10):

$$\frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4v_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2\sigma}{\rho_L R}. \quad (5.10)$$

Беря интеграл от обеих частей уравнения (5.10) по времени,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4v_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2\sigma}{\rho_L R} \right] dt, \quad (5.21)$$

представим его в виде функционала

$$U[R(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, R, R', R'') dt, \quad (5.22)$$

где

$$F = RR'' + \frac{3}{2} R'^2 + \frac{4v_L}{R} R' + \frac{2\sigma}{\rho_L R}, \quad (5.23)$$

где штрихами отмечены соответственно первая и вторая производные радиуса  $R$  пузырька пара по времени  $t$ .

Исследуем на экстремум функционал (5.22), где функция  $F$  предполагается дифференцируемой два раза по аргументу  $t$  при граничных условиях

$$R(t_0) = R_0, \quad R'(t_0) = R'_0, \quad R''(t_0) = R''_0; \quad R(t_1) = R_1, \quad R'(t_1) = R'_1, \quad R''(t_1) = R''_1. \quad (5.24)$$

Вариацией функционала на кривой, реализующей экстремум, имеем:

$$\delta U = \int_{e_0}^{e_1} \left( F_R - \frac{d}{dt} F_{R'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{R''} \right) \delta R dt = 0. \quad (5.25)$$

При произвольном выборе  $\delta R$ , в силу непрерывности выражения в скобках по времени на той же кривой  $R(t)$ , получаем уравнение Эйлера-Пуассона

$$F_R - \frac{d}{dt} F_{R'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{R''} = 0. \quad (5.26)$$

Определив

$$F_R = RR'' - \frac{4\nu}{R^2} R' - \frac{2\sigma}{\rho_L} \frac{1}{R^2}, \quad F_{R'} = 3R' + \frac{4\nu}{R}, \quad \frac{d}{dt} F_{R'} = 3R'' - \frac{4\nu}{R^2} R', \quad F_{R''} = R, \quad \frac{d^2}{dt^2} F_{R''} = R'',$$

и подставив в (5.26), получим уравнение вида

$$R^2 R'' = -\frac{2\sigma}{\rho_L}. \quad (5.27)$$

Сравнивая исходное уравнение (5.10) с (5.27) имеем квадратное уравнение относительно  $R'$

$$\frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = \frac{3}{2} R'^2 + \frac{4\nu_L}{R} R' \quad (5.28)$$

и корни

$$R'_{1,2} = \frac{-\frac{4\nu_L}{R} \pm \sqrt{(4\nu_L/R)^2 + 6[p_B(t) - p_\infty(t)]/\rho_L}}{3}. \quad (5.29)$$

Очевидно, что положительный корень даёт меньшую скорость роста пузырька, чем по абсолютной величине даёт отрицательный корень, соответствующий ускоренному исчезновению пузырька (коллапсу). В первом случае рост парового пузырька происходит за счёт диффузии пара внутрь, естественно, при подогреве жидкости. Во втором случае источник тепла отключён, происходит конденсация охлаждающегося насыщенного пара и, в результате, пузырь быстро исчезает. Аналогичный анализ легко может быть произведён на основе вариационного уравнения Эйлера-Пуассона для случая паро-газового пузырька по уравнению (5.14). Только в этом случае, при большой концентрации газовой примеси в пузыре, он не схлопывается сразу после прекращения нагрева жидкости.

Опуская подробные выкладки, приведём уравнение максимали для паро-газового пузыря, обобщающее уравнение максимали (5.28) для чисто парового пузыря:

$$\frac{p_V(T_\infty) - p_\infty(t)}{\rho_L} = \frac{3}{2} R'^2 + \frac{4\nu_L}{R} R' + 2 \frac{G}{R^3}, \quad (5.30)$$

где  $G = \frac{p_{G_0}}{\rho_L} R_0^3$ .

**3.** В частности, устойчивость к несферическим возмущениям была исследована с чисто гидродинамической точки зрения Биркхоффом, [40], и Плессетом и Митчеллом, [41]. По существу, эти исследования были сферическим эквивалентом неустойчивости Релея-Тейлора; термические эффекты не принимались во внимание. Если инертность газа в пузыре допускается пренебрежимо малой, тогда амплитуда,  $a(t)$ , сферической гармоники деформации порядка  $n$  ( $n > 1$ ) будет определяться уравнением

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{R} \frac{dR}{dt} \frac{da}{dt} - \left[ \frac{(n-1)}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} - (n-1)(n+1)(n+2) \frac{\sigma}{\rho_L R^3} \right] a = 0 \quad (5.31)$$

Отсюда следует, что наиболее неустойчивы случаи, при которых  $dR/dt < 0$  и  $d^2 R/dt^2 \geq 0$ . Эти случаи бывают при коллапсе. С другой стороны, самые устойчивые состояния имеют место, когда  $dR/dt > 0$  и  $d^2 R/dt^2 < 0$ ; это случай, когда пузырьки достигают своего максимального размера. Общий случай уравнения (5.31) будет рассмотрен позднее.

## VI. Энтропия (неаддитивная / неэкстенсивная) Цаллиса [22, 23].

**6.1.** Статья Цаллиса [22] об обобщении статистики Больцмана-Гиббса опубликована три десятилетия тому назад. Теория строится на основе введения нормализованной величины  $p_i^q$ , где  $p_i$  есть вероятность, связанная с событием,  $q$  – любое реальное число. Она используется им для обобщения стандартного выражения энтропии  $S$  в теории информации

$$S = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (6.1)$$

где  $W \subset \mathbb{N}$  есть полное число возможных (микроскопических) конфигураций и  $\{p_i\}$  – ассоциированные вероятности. Для энтропии он даёт выражение

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1}, \quad (q \in \mathbb{R}); \quad (6.2)$$

где  $k$  – традиционная положительная постоянная, а  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ . Сразу же подтверждается, что

$$S_1 \equiv \lim_{q \rightarrow 1} S_q = k \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i \exp[(q-1) \ln p_i]}{q-1} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (6.3)$$

Автор использовал для  $S_q$ -энтропии выражение типа “replica-trick” [22], удобное для применения правила Лопиталья в нахождении предела (3), т.е. имеем

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i \exp[(q-1) \ln p_i]}{q-1} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{-\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i (\exp[(q-1) \ln p_i])}{1} = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i.$$

## 6.2. Микроканоническое распределение.

Максимизация энтропии Цаллиса (2) при условии  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$  введением множителя Лагранжа производится прямо для всех  $q$  в случае эквивероятности, то-есть  $p_i = 1/W$ . и следовательно

$$S_q = \frac{k}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^W p_i \sum_{i=1}^W p_i^{q-1} \right) = \frac{k}{q-1} (1 - W^{1-q}) = k \frac{W^{1-q} - 1}{1-q}. \quad (6.4)$$

Отсюда (при  $q \rightarrow 1$ ) сразу получается знаменитое распределение Больцмана

$$S_1 = k \ln W$$

Вопрос о применимости цаллевских новинок к конкретным случаям интересующих нас в связи с кипением чистой воды и растворов, представляет несомненный интерес.

### 6.3. Отклик на работу Цаллнса [23].

Существует концепция, что статистика Больцмана-Гиббса не может дать длиннохвостовое распределение. В этом состоит оправдание для интенсивного исследования неэкстенсивных энтропий (т.е. энтропии Цаллиса и др.). Каффри объясняет ошибочность этой концепции и показывает, что длиннохвостовое распределение в равновесной термодинамике существует более столетия. В макромире наблюдаются два типичных распределения. Первое – колоколообразная функция, которая есть результат канонического распределения, второе – длиннохвостовое распределение, которое является результатом степенного закона распределения. В то время как некоторые статистические величины являются колоколообразными (рост человека), многие другие, подобные человеческому богатству и др. имеют длиннохвостовое распределение. Длиннохвостовое распределение является таким же общим в природе, как и колоколообразное распределение. Существует довольно распространённая уверенность, что длиннохвостовое распределение не может быть получено из равновесной термодинамики. Причина такой неправильной концепции состоит в способе вывода канонического распределения, а именно в нахождении функции как

$$f(p_i) = \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i + \alpha \sum_{i=1}^W p_i + \beta \sum_{i=1}^W p_i N_i . \quad (6.5)$$

Производная  $\partial f(p_i) / \partial p_i = 0$  даёт каноническое распределение. Здесь  $p$  – вероятность,  $E$  – энергия,  $\alpha$  и  $\beta$  – лагранжевы множители и  $W$  – число микросостояний. Уравнение (6.5) кажется точным, так как первый член на "правой стороне представляет энтропию Гиббса (-), второй член эквивалентен полному числу частиц, а третий член представляет полную энергию системы. С первого взгляда аппроксимации сделаны, и следовательно, единственно возможное решение, которое максимизирует энтропию для данного числа частиц и данного количества энергии есть каноническое распределение [42]. Это подразумевает, что нет способа получить степенной закон распределения максимизацией энтропии Больцмана-Гиббса [22]. В этом по-видимому причина огромных усилий, затраченных на "обобщение" второго закона термодинамики. Идея состояла в том, чтобы так изменить концепцию энтропии, чтобы уравнение (6.5) дало бы степенной закон распределения. В этом оправдание для энтропии Цаллиса [22], энтропии Реньи [43] и многих других. Энтропия Цаллиса неэкстенсивна, что означает, что система в неравновесном состоянии. Физическое объяснение неэкстенсивности – в дальнего радиуса взаимодействия, которая также подразумевает потерю равновесия. Следовательно, принятая энтропия означает отказ от самой важной концепции термодинамики, а именно – тенденции любой системы достигать равновесия. Другими словами, неэкстенсивность означает отказ от второго закона термодинамики всецело! Далее показывается, что допущение, что каноническое распределение является единственным решением, которое максимизирует энтропию Больцмана-Гиббса по принуждению уравнения (6.5), ошибочно. Уравнение (6.5) следует записывать в виде

$$f(p_i, p_j) = \sum_{i=1}^W p_j \ln p_j + \alpha \sum_{i=1}^N p_i + \beta \sum_{i=1}^N p_i E_i \quad (6.6)$$

То есть, энтропию следует суммировать по всем возможным различным конфигурациям  $W$  ансамбля (микросостояниям). Однако, суммирование по энергиям следовало бы производить по состояниям  $N$ , так как распределение, которое мы ищем, является распределением энергии между состояниями, но не микросостояниями (все микросостояния имеют одинаковую энер-

гию!). Обычно,  $W$  и  $N$  различные числа. Ансамбль из  $N$  состояний и  $P$  частиц, где  $P < N$ , и не более, чем одной частице разрешается пребывать в некоем состоянии, имеет число конфигураций

$$W(P, N) = \frac{N!}{(N - P)!P!}. \quad (6.7)$$

Применяя формулу Стирлинга и используя энтропию Больцмана  $S = \ln W$ , получаем, что

$$S \cong -N\{p \ln p + (1 - p) \ln(1 - p)\}, \quad (6.8)$$

В приближении  $p \ll 1$ ,  $(1 - p) \ln(1 - p)$  исчезает, а выражение  $-\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$  есть энтропия.

В этом случае уравнение (6.6) будет вида  $f(p_i) \cong \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i + \alpha \sum_{i=1}^N p_i + \beta \sum_{i=1}^N p_i E_i$  и даёт каноническое распределение.

Заключение на этот счёт состоит в том, что каноническое распределение не есть закон природы, и что существуют лишь системы со слабой степенью заполненности. Поскольку уравнение (6.5) не всегда верно, правильный путь поиска других распределений состоит в том, чтобы рассчитать число микросостояний и их вероятности, что лучше, чем менять выражение для энтропии. Далее показывается, что фактически степенной закон распределения и соответствующая статистика существуют в физике более века. В общем случае (пренебрегая вырождением), мы должны посчитать все конфигурации  $P$  частиц в  $N$  состояниях для любого значения  $p$  (здесь мы заменили символ  $p$  символом  $n$ , т.к.  $P/N > 1$ ). Мы следуем по стопам конструктивной работы Планка 1901 г. [44], именно,

$$W(P, N) = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!P!} \quad (6.9)$$

Мы опять применяем формулу Стирлинга, как это было сделано Планком и получаем, что  $S \cong N\{(n + 1) \ln(n + 1) - n \ln n\}$  или в гиббсовском формализме

$$S = -\sum_{j=1}^W p_j \ln p_j \cong -\sum_{i=1}^N \{n_i \ln n_i - (n_i + 1) \ln(n_i + 1)\} \quad (6.10)$$

(Можно называть эту формулу решением Планка). Если  $n \ll 1$ , мы вновь получаем, что энтропия есть, и, следовательно, каноническое распределение энергии получается, как частный случай. Так как теперь  $n$  интерпретируется как число, а не как вероятность, мы опускаем второй член в уравнении (6.6). Подставляя значение энтропии из (6.10) в уравнение (6.6),

$$f(n_i) \cong -\sum_{i=1}^N \{n_i \ln n_i - (n_i + 1) \ln(n_i + 1)\} + \beta \sum_{i=1}^N n_i E_i, \quad (6.11)$$

получаем уравнение Планка, то есть,

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta E_i} - 1}. \quad (6.12)$$

Подобным образом, подставляя рассчитанное число микросостояний из уравнения (6.9) в уравнение (6.11), получаем распределение Ферми-Дирака. Мы обозначили  $\Phi_i = \beta E_i$  и построили график  $\ln n_i$  против  $\ln \Phi_i$ , из которого хорошо видно, что при  $n > 1$ , уравнение Планка даёт

степенной закон распределения с наклоном  $-1$ . Когда число частиц превышает число состояний (высокая степень размещения), получается низкая степень размещения, а при низкой степени размещения получается каноническое распределение. В классическом приближении Релея-Джинса распределение фотонов в радиационной моде есть длиннохвостовое распределение. Фактически та же статистика была использована при выводе закона Бенфорда и распределения богатств [45-47].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приводится Информация GESJ: Physics 2011 | No. 2(6) о работе Д. Вашакмадзе и полный текст её статьи [31]

### II 1. Информация GESJ: Physics 2011 | No. 2(6) ISSN 1512-1461 3.

D. T. Vashakmadze. Knot Theory and Particle Physics

St. Andrew the First Called Georgian University of The Patriarchy of Georgia Abstract. In this work (representing also enlarge version of [30] our preliminary article “Knot Theory and Particle Physics” published in the “Proceed. of VIAM”, v. 44,1992) an attempt is made to do topological interpretation of quantum numbers (s, Q, B, S, J) and discrete symmetries (C, P, CP) of particles. As a result a topological “diagram” is obtained, which can be “read” as Gell-Mann-Nishijima rule. In the last part a sequence of co-homological groups describing hierarchy of anomalies well-known in QFT is interpreted as a certain sequence of co-homological groups for cut knots. Further the topological singularity model for elementary particles is proposed. A particle is identified with a branching set of the 3- dim space, which is in general a knotted S1-sphere. As application in the last part Knotted singularity model for elementary particles is proposed and hence some consequences for cosmology are obtained which are in good agreement with the recent astronomical data.

### II 2. D. Vashakmadze. From “Knotted particles” to Some Cosmological Problems [31].

Knots play fundamental role in the modern topology, as in the theory of 3-dimension manifolds. The idea of imaging particles as knots was developed among some others in the widely-referenced papers by Faddeev and Niemi, where also a rich bibliographical data in this direction is provided (for example [48]).

We started to look for analogies as early as in 1992 [30], where we considered wild and non-invertible knots, defined knot as a particle, considering the knot as a branching set of some 3-dim. Manifold over sphere  $S_0^3$ . Even more precisely – in our scenario a particle is a branching set for the physical space, where the total topology of space is homeomorphic to  $H^3$ , we follow the action of universal group U [49-51] (introduced by Thurston [52]) on hyperbolic space for any closed and oriented 3-manifold.  $M^3$  there is a finite subgroup  $G \leq U$  such that  $M^3$  is homeomorphic to  $H^3/G$ . The fundamental polyhedron corresponding to this universal group is a regular hyperbolic dodecahedron with dihedral right angles, where identification occurs by some group  $G \subset IsomE^3$ , and the orbit space is  $S^3$  with the singular set  $\Sigma$  – Borromean rings. Then any 3D manifold is a branched covering of  $S^3$  with  $\Sigma$ . This group is generated by  $\pi/2$  rotating around the axes taken for each of the three pairs of opposite edges of any one dodecahedron on which can serve as a fundamental domain. An important property (for us) is the fact that for the families of surfaces which are formed by the left-invariant (under the action of group U) faces of dodecahedron each two do not cross, or cross at right angles (see Fig. 1). Generators of group U have the following form as shown in (4)

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 - iR + iR^2 & -iR - iR^2 - iR^3 \\ 1 - 2iR + iR^3 & 1 + iR - iR^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 - R + R^2 & 1 - R + R^2 \\ -R - R^2 + R^3 & 1 + R - R^2 \end{bmatrix},$$

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 + R - iR^2 & -i - 2iR - iR^3 \\ 1 - R + R^2 & 1 - R + iR^2 \end{bmatrix}.$$

We will denote by U-quantization the action of U on H3. We also *postulate* that:

**(\*) To the propagation of electromagnetic waves in vacuum corresponds topological U-quantization of given set of space.**

Now we state volume some correspondences following from (\*): (1) The photons can only travel on the U-invariant Euclidean sub-manifold of H3; (2) The Relic Background Radiation is interpreted as a consequence of global topological quantizations of the H3 Topological Bang, which occurred to a non-quantized space; (3) Considering the volume of a single quantum of this space – the hyperbolic volume of a hyperbolic dodecahedron where we take it approximately to be equal to a sphere of radius  $r = \alpha$ , where  $\alpha$  is the half-axes of the dodecahedron  $R/\alpha = 1.27$  cm (see [50, 53]):

$$V_{hyper} = 4\pi \left( \frac{r(1+r^2)}{(1-r^2)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \right).$$

One can calculate that respect to Euclidian sphere the hyperbolic volume will be about 44 times more so, the volume of observed space is only 3% of the whole hyperbolic space H3. As known, in order to obtain the critical value of the density of matter in the universe (needed to explain its flatness) it became necessary to introduce dark energy together with the dark mass both of which provide for the missing 95 % of the whole mass of the universe. But according to (\*) the optically observed Universe will always result Euclidean, while the non-zero vacuum energy can be interpreted as hidden hyperbolicity of the topologically quantized space.

The trajectory of a photon-localized in space (as in atom) will take form of Borromean Rings as the Euclidean lines – the axes of the rotations generation of the universal group for the covering  $n^3/u \rightarrow S^3 \setminus B$  will cover the Borromean Rings infinite number of times. The Field particles such as  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$  – Bosons of the Electro-weak theory are described by Universal knots. So weak decays of the type  $A \rightarrow BF$  (for instance,  $(n^0 \rightarrow p^+ w^-)$ ) are viewed as a transformation of a manifold  $M_0^3 = S^3 \setminus k_\Delta$  in to a manifold  $M_0^3 = S^3 \setminus k_\beta$  because every closed oriented 3-manifold can be obtained from a finite set of dodecahedra by pasting along pentagonal faces in pairs.

We conjecture the existence of the following group-type structure which includes leptons and gauge vector bosons (some unknown definitions are from [30]):

$$\{G^*\} = \{e, \nu_e, \bar{e}, \bar{\nu}_e, \mu, \bar{\nu}_\mu, \tau, \nu_\tau, \bar{\tau}, \bar{\nu}_\tau, W^-, W^+, Z^0\}.$$

Then the expression for the processes of the type  $[g(i)g(k)(-1)] = K$ , where whole K is a subgroup of  $G^*$ , will divided  $G^*$  in the equivalence classes  $\{\alpha, \{\beta\}, ang\{g\}\}$  respect to the semi group  $F = \{W^-, W^+, Z^0\}$ . According to E. Noether theorem this division induces a natural homomorphism of the  $G^*$  on to a group  $\Gamma$  – where the non-identity elements of the group  $\Gamma$  are homeomorphic images of the lepton generations. Suppose that the complementary spaces for proton and neutron  $S^3 \setminus k_p$  and  $S^3 \setminus k_n$  are covering spaces for the same  $M_0^3$  (Fig. 5) [51], but there is a perturbation in the covering group

of the neutron, which means, that for an ensemble of  $N$  neutrons,  $N \gg 1$ , a single branching of the universal covering space for  $N$  neutron wave function includes the leaves of different copies of  $S^3 \setminus k_{(n^0)}$ , as can be illustrated by the analogy with the Kantor type Wild Knot (Fig. 3) [54], then in the remaining neutrons will be  $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} \approx 2^k$ . Here we note that in 1957 Everett introduced the concept of a branched wave-function, to explain the probability nature of the particle decay; introducing a many world interpretation of quantum mechanics, when for all moments when the neutron can decay, there is one copy of the universe, where this really happens (Fig. 2). We also underline the affinity of this concept to the theoretical bases of which is at the origin of very interesting for us experiments by M. Berry. Here we quote the branching of the dislocation loop of the wave-function. The phase-surface of monochromatic light see for instance Fig. 6.

LATEST TRENDS on SYSTEMS (Volume II)

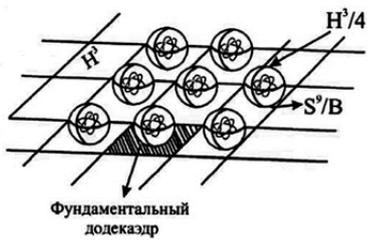


Fig. 1. Acting of group U on space H(3)

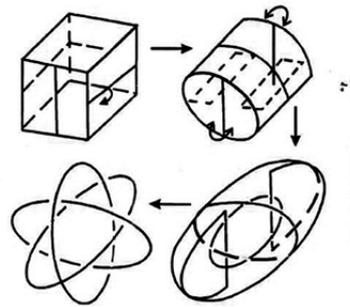


Fig. 2. The image of the axes of rotation is the Borromean rings.

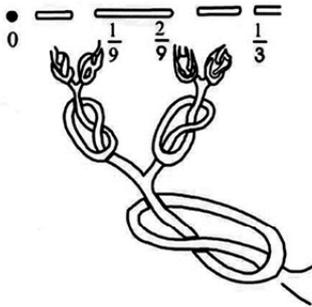


Fig.3. Branching of neutrons wave-function

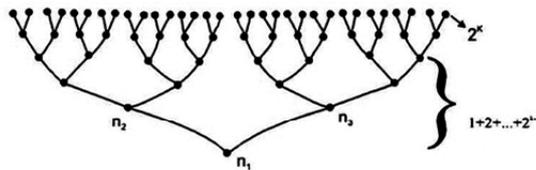


Fig. 4. N-particle wave-function of neutrons

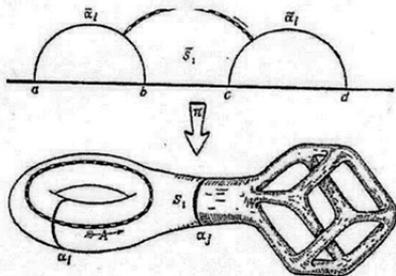


Fig. 5. Perturbation in the covering group. Picture by George Francis

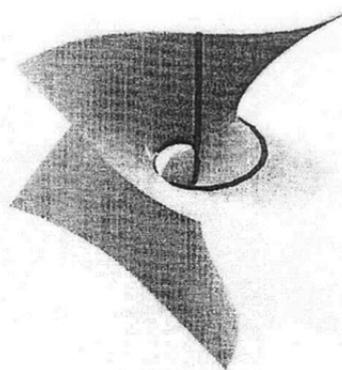


Fig. 6. Phase surface M. Berry.

It is natural to ask does this topological bang scenario have any advantages respect to traditional big bang theory. One can easily see that for the topologically quantized universe the problems of homogeneity and horizon can be solved without the help of the inflationary theory if one desires of course. Secondly the large-scale structure of the universe such as filamentary distribution of ordinary matter and structure like Sloan-Great Wall follow naturally from *postulate (\*)*. At last I would be express my great gratitude to my scientific consultant Academician Sergei Novikov for his attention to my work and Sofo Burjanadze, who helped me in writing down this article.

## Литература

1. Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая физика. М.: Наука, 1982, 584 с .
2. Van-der-Waals. Die Continuitat des gasformigen u. flussigen Zustandes. Leipzig, Barth, Auflage II, 1899.
3. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, Лен.Отд., 1975, 592 С.
4. Зельдович Я. Б. К теории образования новой фазы. Кавитация. ЖЭТФ, 1942, Вып. 11-12, с. 525-538.
5. Dergarabedian P. The rate of growth of vapor bubbles in superheated water. ASME J. Appl. Mech. 1953, v. 20, pp. 537-545.
6. Каган Ю. О кинетике кипения чистой воды. Ж. Физ. Хим., 1960? Т. XXXIV, № 1, с. 92-101.
7. Скрипов В. П. Метастабильные жидкости. М.: Наука, ГРФМЛ, 1972, 312 с.
8. Brennen Chr. E. Cavitation and bubble dynamics. Oxford University Press, 1995, 64 p.
9. Boubnov B. M., Golitsyn G. S. Convection in rotating fluids. J. Fluid Mech., 1995, v. 219, pp. 215-239.
10. Carey V. P. Liquid-vapour phase-change phenomena. Hemisphere Publ. Co., 1992.
11. Ceccio S. L., Brennen C. E. Observations of the dynamics and acoustics of travelling bubble cavitation. J. Fluid Mech., 1991, v. 233, pp. 633-660.
12. Gvelesiani A. I. To the problem of one-dimensional two-phase/many-component flow in different geophysical mediums. The Journal of the Georgian Geophysical Society, 2013, v.16B, pp. 119-128.
13. Gvelesiani A., Chiabrishvili N. Laboratory modeling of thermals generation in geophysical environments by bubble boiling method. Journal of the Georgian Geophysical Society, 2013, v. 16B, pp. 128-136.
14. Gvelesiani A., Chiabrishvili N. Additional experiments about investigation of the peculiarities of the bubble boiling of clear water, H<sub>2</sub>O, and sugar, C<sub>12</sub>H<sub>22</sub>O<sub>11</sub>, and edible salt, NaCl, water solutions of different densities. Journal of the Georgian Geophysical Society, 2014, v.17A, pp. 132-139.
15. Gvelesiani A. Open thermodynamic systems: convection and similar processes modeling by the only fluids bubble boiling method. Journal of the Georgian Geophysical Society, 2014, v.17B, pp. 38-57.
16. Gvelesiani A., Chiabrishvili N. Definition of admixture mass content density of Tbilisi thermal waters by the original fluids bubble boiling laboratory method. Journal of the Georgian Geophysical Society, 2015, v.18B, pp. 52-63.
17. Gvelesiani A. On the characteristic functions of different kind thermodynamic systems: theory, experiment and observation. Journal of the Georgian Geophysical Society, 2016, v. 19 B, pp. 3-17.
18. Gvelesiani A. On the geometric formalism of thermodynamics: In the context of liquid bubble-boiling and matter glassy state. Journal of the Georgian Geophysical Society, 2017, v. 20 B, pp. 3-12.
19. Shekrladze I. Boiling heat transfer: Convection controlled by nucleation. INTECH, 2018.
20. Moore F. D., Mesler R. B. The measurement of rapid surface temperature fluctuations during nucleate boiling of water. American Institute of Chemical Engineers Journal, 1961, v. 7 (5), pp. 620-624.
21. Wang H., Peng X. F., Christopher D. M., Garimella S. V. Jet flows around microbubbles in sub-cooled boiling. Journal of Heat Transfer. 2005, v. 127, p. 802.

22. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 1988, v. 52, Nos. 1 / 2, pp. 479-487.
23. Kafri O. A comment on nonextensive statistical mechanics. *INTERNET, New Entropy*, 4 P.
24. Тамманн Г. Стеклообразное состояние. М. – Л.: ОНТИ ГРОТЛ, 1935, 138 с.
25. Тамманн Г. Руководство по гетерогенному равновесию. Л.: ОНТИ ХТ, 1935, 328 с.
26. Габарашвили Т. Г., Гвелесиани А. И. Об особенностях замерзания переохлаждённых капель воды, сталкивающихся с градиной в электрическом поле. *Изв. АН СССР, ФАО*, 1970, т. VI, N 9, с. 960 – 964.
27. Гзиришвили Т. Г., Карцивадзе А. И., Окуджава А. М. Гетерогенная нуклеация льда. Тбилиси: Мецниереба, 1984, 140 с.
28. Gvelesiani A. On the hierarchy of mesoscale vortexes in the turbulent media. *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, 2013, v. 27.
29. Shekrladze I. Laminar-turbulent transition as a discharge of eddy metastability of shear flow. *Georgian Technical University Tbilisi, Georgia (A brief outline of the lecture)*, 2018, 8 p.
30. Vashakmadze D. Knot theory and Particle Physics. *Proceed. Inst. Appl. Math.*, 1992, v. 44, pp. 128-158.
31. Vashakmadze D. From “knotted particles” to some cosmological problems. *Latest Trends on Systems (Volume II). 14th WSEAS International Conference on Systems (Part of the 14th WSEAS CSCC Multiconference (Volume II)). Corfu Island, Greece, July, 22-24, 2010*, pp. 366-369.
32. Faddeev L. Knotted solutions and their physical applications. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 2001, pp. 1399-1403.
33. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II. М.-Л.: ОГИЗ, 612 с.
34. Rayleigh, Lord. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.* 1917, v. 34, pp. 94-98.
35. Plesset M. S. The dynamics of cavitation bubbles. *ASME, J. Appl. Mech.*, 1949, v. 16, pp. 228-231.
36. Plesset M. S., Zwick S. A. A nonsteady heat diffusion problem with spherical symmetry. *J. Appl. Phys.*, 1952, v. 23, No. 1, pp. 95-95.
37. Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление. М.: ГИТТЛ, 1958, 164 с.
38. Theofanous T., Biasi L., Isbin H. S., Fauske H. A theoretical study on bubble growth in constant and time-dependent pressure fields. *Chem. Eng. Sci.*, 1969, v. 24, pp. 885-897.
39. Gvelesiani A. On the growth of vapour bubble in metastable liquid as variational problem. *Journal of the Georgian Geophysical Society*, 2018, v. 21 B (В печати).
40. Birkhoff G. Note on Taylor instability. *Quart. Appl. Math.*, 1954, v. 12, pp. 306-309.
41. Plesset M. S., Mitchel T. P. On the stability of the spherical shape of a vapour cavity in a viscous fluid. *Quart. Appl. Math.*, 1956, v. 13, No. 4, pp. 419-430.
42. Back C. Generalize information and entropy in physics. *Arxiv: 0902.1235*.
43. Lenzi E. K.et. al. Statistical mechanics based on Renyi entropy. *Phisica A*, 2000 v. 280, p. 337.
44. Planck M. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der Physik*, 1901, v. 4, p. 553.
45. Kafri O. The second law as a cause for the evolution. *Arxiv: 0711.4507*.
46. Kafri O. Sociological inequality and the second law. *Arxiv: 0805.3206*.
47. Kafri O. Entropy in direct derivation of Benford's law. *Arxiv: 0901.3047*.
48. Faddeev L. Knotted solitons and their physical applications. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 2001, pp. 1399-1403.
49. Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos J. M. On the universal group of the Borromean rings. *Lecture Notes, Mathematics*, v. 820, Springer-Verlag, 1989, pp. 1-13.
50. Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos J. M., Written W. C. On the universal groups and three-dim. manifolds. *Invent. Math.*, 1987, v. 87, pp. 441-456.
51. Abikoff W. The real-analytic theory of Teichmuller Space. Springer-Verlag, Bern / Heidelberg / New York, 1980.

52. Thurston W. The geometry and topology of three-dimensional manifolds. Princeton Press Preprint, 1996.
53. Elstrodt J., Grunewald F. Mennicke groups acting on hyperbolic space. Springer, 1997.
54. Sossinsky A. Nodi genesi di una teoria matematica. Bollati Boringhieri, 2000.

## **გეოფიზიკური თერმოდინამიკური სისტემების სტატისტიკური და სითბური თვისებები**

**გველესიანი ა.**

**რეზიუმე**

მოყვანილია ახალი შედეგები საკუთარი თეორიული და ექსპერიმენტული კვლევების მეტასტაბილურ სითხეში ორთქლის ბუშტების წარმოშობის და ზრდის პროცესის ფეთქებადი მსხვილბუშტოვანი დუდილის რეჟიმის მიღწევამდე. პირველადაა განხილული მეტასტაბილურ სითხეში ორთქლის ბუშტის ზრდის რელიე-პლესეტის განტოლება როგორც ვარიაციული ამოცანა. მიღებული დიფერენციალური განტოლებები საშუალებას იძლევა დადგინდეს ვარიაციული ამოცანის სათანადო ექსტრემალეები.

## **Статистические и тепловые свойства параметров геофизических термодинамических систем**

**Гвелесиани А. И.**

**Реферат**

Рассматриваются результаты собственных новых экспериментальных и теоретических работ по проблеме генерации и дальнейшего роста пузырьков пара в метастабильных жидкостях вплоть до взрывного макробуритного кипения жидкости. Обсуждаются также соответствующие результаты известных исследований других авторов. Сначала обобщенное уравнение Рэлея-Плессета рассматривалось как вариационная задача. Полученные дифференциальные уравнения позволяют найти экстремали рассмотренных вариационных задач.

## **Statistical and thermal properties of geophysical thermodynamic systems**

**Gvelesiani A. I.**

**Abstract**

It is considered results of own new experimental and theoretical works on the problem of generation and further growth of the vapour bubbles in the methastable liquids right up to explosive macro-bubble boiling of the liquid. Corresponding results of well-known investigations of other authors are also discussed. First the generalized equation of Rayleigh-Plesset considered as variational problem. Obtained differential equations allow us to find the extremals of considered variational tasks.